曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第６回}}$

(2024年11月 5日(火)配信分)

$\boxed{\S 2.\ 空間曲線}$

　この § では空間曲線について考える。弧長媒介変数表示が何かと便利であることが、§1 でわかったので、ここではいきなり空間曲線を $X(t) = {}^t(x(t), y(t), z(t))$ で表す。都合上 C^3 級を仮定する。その理由はすぐわかる。

　空間曲線においても、速度ベクトル $X'(t) = {}^t(x'(t), y'(t), z'(t))$ が単位ベクトルとなるような媒介変数を弧長媒介変数と呼ぶ。このとき、$\|X'(t)\| = 1$ で一定より、平面曲線同様、速度ベクトル $X'(t)$ と加速度ベクトル $X''(t)$ は直交する。

　点 $X(t)$ を通り、$X'(t)$ と直交する平面を法平面 (normal)、$X'(t)$ と $X''(t)$ が張る平面を接触平面 (osculating)、両者と直交する平面を展直平面 (rectifying) と呼ぶ。

ここで、平面曲線同様に曲率を定義したいが、空間内では進行方向の左側と言うのが判然としない。そこで、加速度ベクトルの方向を左側と言うことにしてしまう。言い換えれば、接触平面に曲線が接しているので、この平面に沿って、進行方向の内側を左側と考えるのである。すなわち、加速度ベクトルが 0 のときは曲率 0 とし、そうでないときは、$\sigma(t) = \|X''(t)\|$ を曲率として定める。ここで $N(t) = X''(t)/\|X''(t)\|$ を主法線単位ベクトルと呼ぶ。$X''(t) = \sigma(t)N(t)$ と言うことになる。

空間曲線では、曲率だけで曲がり具合は表し切れていない。実際、接触曲面が向きを変えて行くので、その度合も測りたい。そこで、従法線単位ベクトル $B(t) = X'(t) \times N(t)$ を考える。これは接触平面の法線ベクトルである。$X'(t), N(t), B(t)$ は正規直交基底をなし、空間曲線の Frenet-Serret 枠と呼ばれる。

　$N(t)$ が進行方向から見て左巻きにどれだけぶれるかは、$N'(t)$ の $B(t)$ 方向の成分を見ればよい。そこで $\tau(t) = \langle N'(t), B(t)\rangle$ とおき、空間曲線の振率と呼ぶ。（その逆数を振率半径と呼ぶ。）

　今 $N(t)$ も単位ベクトルであることから、$\langle N(t), N'(t)\rangle = 0$ を得る。一方、$\langle N(t), X'(t)\rangle = 0$ より、

$$\langle N'(t), X'(t)\rangle = -\langle N(t), X''(t)\rangle = -\langle N(t), \sigma(t)N(t)\rangle = -\sigma(t)$$

を得る。従って $N'(t) = -\sigma(t)X'(t) + \tau(t)B(t)$ を得る。

ついでに $B'(t)$ についても見ておこう。$B(t)$ も単位ベクトルであることから、$\langle B(t), B'(t)\rangle = 0$ を得る。一方、$\langle B(t), X'(t)\rangle = 0$ より、

$$\langle B'(t), X'(t)\rangle = -\langle B(t), X''(t)\rangle = -\langle B(t), \sigma(t)N(t)\rangle = 0$$

$\langle B(t), N(t)\rangle = 0$ より、

$$\begin{aligned}
\langle B'(t), N(t)\rangle &= -\langle B(t), N'(t)\rangle \\
&= -\langle B(t), -\sigma(t)X'(t) + \tau(t)B(t)\rangle \\
&= -\langle B(t), \tau(t)B(t)\rangle \ = \ -\tau(t)
\end{aligned}$$

を得る。従って $B'(t) = -\tau(t)N(t)$ を得る。

以上をまとめると、次のようになる。

$$\frac{d}{dt}(X'(t), N(t), B(t)) = (X'(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\sigma(t) & 0 \\ \sigma(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

一方 $X''(t) = \sigma(t)N(t)$ より、

$$\begin{aligned} X'''(t) &= \sigma'(t)N(t) + \sigma(t)N'(t) \\ &= \sigma'(t)N(t) + \sigma(t)(-\sigma(t)X'(t) + \tau(t)B(t)) \\ &= -\sigma(t)^2 X'(t) + \sigma'(t)N(t) + \sigma(t)\tau(t)B(t) \end{aligned}$$

以上をまとめると、次のようになる。

$$(X'(t), X''(t), X'''(t)) = (X'(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma(t)^2 \\ 0 & \sigma(t) & \sigma'(t) \\ 0 & 0 & \sigma(t)\tau(t) \end{pmatrix}$$

ここで両辺の行列式をとれば、

$$|X'(t), X''(t), X'''(t)| = \sigma(t)^2\tau(t)$$

を得る。

問2.3　xy-平面上の曲線 $y=f(x)$ を、y-軸と平行で半径 1 の直円柱上に巻き付けてできる空間曲線 $X(t)={}^t(\cos t, \sin t, f(t))$ $(t\in\mathbf{R})$ の曲率と捩率を与える公式を求めよ。

t は弧長パラメーターではないので、まず σ の定義と $\sigma^2\tau$ を求める公式を、弧長でないパラメーターに書き換える。

第５回の問の解答

問 B.1

$$
\begin{aligned}
\langle V \times W, U\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)u_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)u_2 \\
&\qquad\qquad\qquad + (v_1w_2 - v_2w_1)u_3 \\
&= v_1w_2u_3 + v_2w_3u_1 + v_3w_1u_2 \\
&\qquad - v_1w_3u_2 - v_2w_1u_3 - v_3w_2u_1 \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{vmatrix} \\
&= |V, W, U|
\end{aligned}
$$

問 B.2

$$
\begin{aligned}
&\langle V, W\rangle^2 + \|V \times W\|^2 \\
&\quad = (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2 \\
&\qquad +(v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2 \\
&\quad = {v_1}^2{w_1}^2 + {v_2}^2{w_2}^2 + {v_3}^2{w_3}^2 \\
&\qquad +2v_1w_1v_2w_2 + 2v_2w_2v_3w_3 + 2v_3w_3v_1w_1 \\
&\qquad +{v_2}^2{w_3}^2 - 2v_2w_3v_3w_2 + {v_3}^2{w_2}^2 \\
&\qquad +{v_3}^2{w_1}^2 - 2v_3w_1v_1w_3 + {v_1}^2{w_3}^2 \\
&\qquad +{v_1}^2{w_2}^2 - 2v_1w_2v_2w_1 + {v_2}^2{w_1}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= {v_1}^2{w_1}^2 + {v_1}^2{w_2}^2 + {v_1}^2{w_3}^2 \\
&\quad +{v_2}^2{w_1}^2 + {v_2}^2{w_2}^2 + {v_2}^2{w_3}^2 \\
&\quad +{v_3}^2{w_1}^2 + {v_3}^2{w_2}^2 + {v_3}^2{w_3}^2 \\
&= ({v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2)({w_1}^2 + {w_2}^2 + {w_3}^2) \\
&= \|V\|^2\|W\|^2
\end{aligned}
$$

問B.3

$$
\begin{aligned}
PV_1 &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (V_1, V_2, V_3) V_1 \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t ({}^tV_1 V_1, {}^tV_2 V_1, {}^tV_3 V_1) \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (\langle V_1, V_1 \rangle, \langle V_2, V_1 \rangle, \langle V_3, V_1 \rangle) \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (1, 0, 0) \\
&= W_1 \\
PV_2 &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (V_1, V_2, V_3) V_2 \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t ({}^tV_1 V_2, {}^tV_2 V_2, {}^tV_3 V_2) \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (\langle V_1, V_2 \rangle, \langle V_2, V_2 \rangle, \langle V_3, V_2 \rangle) \\
&= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (0, 1, 0) \\
&= W_2
\end{aligned}
$$