曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第８回}}$

(2024年11月19日(火)配信分)

§3. 曲面

この § では §1 で行ったことを、空間内の曲面について試みてみようと思う。

曲面と言えばこれまで主として関数 $z = f(x, y)$ のグラフを考えて来た。計算の都合上以下 f は C^2 級であると仮定しよう。さて、グラフの形状を調べるためにやはり二次偏導関数を用いたことを思い出してみよう。

そこで、各点毎に座標軸を取り替えると言う離れ業をここでも使うことにする。もっとも今回はかなり面倒な計算になる。

まず、関数 $y=f(x_0,y_0)$ のグラフの点 $(x_0,y_0,f(x_0))$ が原点に来るよう平行移動による座標変換を行えば、

$$z+f(x_0,y_0)=f(x+x_0,y+y_0)$$

となる。さて、新しい原点における接ベクトルは ${}^t(1,0,f_x(x_0,y_0))$, ${}^t(0,1,f_y(x_0,y_0))$ で張られるので、右手系で上向きの法ベクトルは ${}^t(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$ である。これを絶対値で割って単位ベクトルとしたものが ${}^t(0,0,1)$ となるような向きを変えない直交変換を考える。新しい座標を ${}^t(X,Y,Z)$ で表すと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

ただし

$$\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}} \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。他の p_{ij} は後で適当に選ぶことにするが、向きを変えない直交変換なので、

$$p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} = p_{13}$$
$$p_{31}p_{12} - p_{32}p_{11} = p_{23}$$
$$p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = p_{33}$$

が成り立つことに注意する。

座標変換後の曲面を表す式は、次のようになる。

$$p_{31}X+p_{32}Y+p_{33}Z+f(x_0,y_0)=f(p_{11}X+p_{12}Y+p_{13}Z+x_0,p_{21}X+p_{22}Y+p_{23}Z+y_0)$$

原点の近くでは Z は (X,Y) の関数で書けていることを見越して、両辺を X,Y で微分してみると、

$$\begin{aligned} p_{31}+p_{33}Z_X &= f_x(\cdots)(p_{11}+p_{13}Z_X)+f_y(\cdots)(p_{21}+p_{23}Z_X) \\ p_{32}+p_{33}Z_Y &= f_x(\cdots)(p_{12}+p_{13}Z_Y)+f_y(\cdots)(p_{22}+p_{23}Z_Y) \end{aligned}$$

もう一度 X, Y で微分してみると、

$$
\begin{aligned}
p_{33}Z_{XX} &= f_{xx}(\cdots)(p_{11}+p_{13}Z_X)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(p_{11}+p_{13}Z_X)(p_{21}+p_{23}Z_X) \\
&\quad + f_{yy}(\cdots)(p_{21}+p_{23}Z_X)^2 + f_x(\cdots)p_{13}Z_{XX} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{XX} \\
p_{33}Z_{XY} &= f_{xx}(\cdots)(p_{11}+p_{13}Z_X)(p_{12}+p_{13}Z_Y) + f_{yy}(\cdots)(p_{21}+p_{23}Z_X)(p_{22}+p_{23}Z_Y) \\
&\quad + f_{xy}(\cdots)\{(p_{11}+p_{13}Z_X)(p_{22}+p_{23}Z_Y) + (p_{21}+p_{23}Z_X)(p_{12}+p_{13}Z_Y)\} \\
&\quad + f_x(\cdots)p_{13}Z_{XY} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{XY} \\
p_{33}Z_{YY} &= f_{xx}(\cdots)(p_{12}+p_{13}Z_Y)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(p_{12}+p_{13}Z_Y)(p_{22}+p_{23}Z_Y) \\
&\quad + f_{yy}(\cdots)(p_{22}+p_{23}Z_Y)^2 + f_x(\cdots)p_{13}Z_{YY} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{YY}
\end{aligned}
$$

$(X, Y) = (0, 0)$ では $Z = 0$, $Z_X = Z_Y = 0$ を代入すれば、

$$
\begin{aligned}
p_{33} Z_{XX} &= f_{xx}(x_0, y_0) {p_{11}}^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) p_{11} p_{21} + f_{yy}(x_0, y_0) {p_{21}}^2 \\
&\qquad + \{ f_x(x_0, y_0) p_{13} + f_y(x_0, y_0) p_{23} \} Z_{XX} \\
p_{33} Z_{XY} &= f_{xx}(x_0, y_0) p_{11} p_{12} + f_{xy}(x_0, y_0) \{ p_{11} p_{22} + p_{21} p_{12} \} + f_{yy}(x_0, y_0) p_{21} p_{22} \\
&\qquad + \{ f_x(x_0, y_0) p_{13} + f_y(x_0, y_0) p_{23} \} Z_{XY} \\
p_{33} Z_{YY} &= f_{xx}(x_0, y_0) {p_{12}}^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) p_{12} p_{22} + f_{yy}(x_0, y_0) {p_{22}}^2 \\
&\qquad + \{ f_x(x_0, y_0) p_{13} + f_y(x_0, y_0) p_{23} \} Z_{YY}
\end{aligned}
$$

より、

$$Z_{XX} = \frac{f_{xx}(x_0, y_0){p_{11}}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{11}p_{21} + f_{yy}(x_0, y_0){p_{21}}^2}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} - f_y(x_0, y_0)p_{23}}$$

$$Z_{XY} = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}p_{12} + f_{xy}(x_0, y_0)(p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12}) + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}p_{22}}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} - f_y(x_0, y_0)p_{23}}$$

$$Z_{YY} = \frac{f_{xx}(x_0, y_0){p_{12}}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{12}p_{22} + f_{yy}(x_0, y_0){p_{22}}^2}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} - f_y(x_0, y_0)p_{23}}$$

これが座標軸を接平面と法線にあわせた時の、二階偏微分係数を与える式である。

これらが作る二次対称行列

$$\begin{pmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{XY} & Z_{YY} \end{pmatrix}$$

の固有値、トレース（固有値の和）の半分、行列式（固有値の積）を、それぞれ曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ における主曲率、平均曲率、Gauss 曲率と呼ぶ。主曲率は、曲面を法線を通る平面で切ったとき、切り口に現れる曲線の曲率の最大値と最小値である。

問 3.1　これらが P の選び方によらないことを確かめよ。

平均曲率を H, Gauss 曲率を K で表す。

具体的に計算してみると、分母に現れる式の値は、

$$p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} - f_y(x_0, y_0)p_{23} = \frac{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}}$$
$$= \sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}$$

であり、

$(Z_{XX} + Z_{YY})$ の分子

$$= f_{xx}(x_0, y_0)({p_{11}}^2 + {p_{12}}^2) + 2f_{xy}(x_0, y_0)(p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22}) + f_{yy}(x_0, y_0)({p_{21}}^2 + {p_{22}}^2)$$
$$= f_{xx}(x_0, y_0)(1 - {p_{13}}^2) + 2f_{xy}(x_0, y_0)(0 - p_{13}p_{23}) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 - {p_{23}}^2)$$
$$= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(1 + f_y(x_0, y_0)^2) - 2f_{xy}(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 + f_x(x_0, y_0)^2)}{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}$$

より平均曲率は、

$$H = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(1 + f_y(x_0, y_0)^2) - 2f_{xy}(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 + f_x(x_0, y_0)^2)}{2(1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2)^{3/2}}$$

となり、また

$(Z_{XX}Z_{YY}-{Z_{XY}}^2)$ の分子

$$
\begin{aligned}
&= (f_{xx}(x_0,y_0){p_{11}}^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)p_{11}p_{21} + f_{yy}(x_0,y_0){p_{21}}^2) \\
&\qquad \times (f_{xx}(x_0,y_0){p_{12}}^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)p_{12}p_{22} + f_{yy}(x_0,y_0){p_{22}}^2) \\
&\qquad -\{f_{xx}(x_0,y_0)p_{11}p_{12} + f_{xy}(x_0,y_0)(p_{11}p_{22}+p_{21}p_{12}) + f_{yy}(x_0,y_0)p_{21}p_{22}\}^2 \\
&= (f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2)({p_{11}}^2{p_{22}}^2 + p_{21}^2p_{12}^2 - 2p_{11}p_{12}p_{21}p_{22}) \\
&= (f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2)(p_{11}p_{22}-p_{21}p_{12})^2 \\
&= (f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2)p_{33}^2 \\
&= \frac{f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2}{1+f_x(x_0,y_0)^2+f_y(x_0,y_0)^2}
\end{aligned}
$$

より Gauss 曲率は、

$$K = \frac{f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{(1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2)^2}$$

となる。

問3.2　曲面 $z = ax^2 + by^2$, $z = xy$ の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。また、原点において、主曲率を求めよ。

問3.3　$a \neq 0$ とする。曲面 $z = a\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0, y \in \mathbf{R})$ の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。

第８回の問の解答

問2.4

問 2.3 の解答より $\tau(t) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $f'(t) + f'''(t) = 0$ である。これは定数係数線形常微分方程式であり、その特性方程式は$0 = \lambda + \lambda^3 = \lambda(\lambda^2 + 1)$ より、その一般解は

$$f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 = C_0 \sin(t + t_0) + C_3$$

を得る。

一方、、常微分方程式の解法を知らなくても、問 2.1 の結論より、この曲線はある平面上にあるとわかるので、円柱の平面による切り口と言うことで、楕円になり、その展開図を考えると同じ結論に至る。

問2.16

$||X'''(t)|| = 0$ なら $X'''(t) = \mathbf{0}$ より $|X'(t), X''(t), X'''(t)| = 0$ がなりたつので、前回準備した公式により、弧長パラメーターでなくても、$\sigma(t)^2\tau(t) = 0$ で、さらに $\sigma(t)^2 = ||X''(t)||^2 \neq 0$ より $\tau(t) = 0$ を得る。