応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第 1 回}}$

(2024年10月2日(水)配信分)

この講義のあらすじ

　特定の周期を持つ関数を、共通の周期を持つ正弦関数と余弦関数の重ね合わせで近似する。

　近似の精度を上げるため、より周期の細かい正弦余弦を加え、近似式の極限としての無限級数を考える。

　ある程度よい(かつ無理の無い) 性質を持つ関数については、その極限は元の関数と一致する。

　さらに(自然な) 条件を加えると、この無限級数は項別微分可能である。

　そのことを利用すると、閉区間に関する熱方程式や波動方程式が解ける。(少なくとも解が級数で表せる。)

　周期の無い場合には、和ではなく積分で重ね合わせると、同様のことができる。

$\boxed{\text{線形代数の準備}}$

n, m は自然数で、$n \leq m$ とします。内積の定義された m 次元ベクトル空間において、n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0 & (i, j = 1, \ldots, n; i \neq j), \\ ||\boldsymbol{e}_j|| = 1 & (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

を満たすとき、正規直交系であると言います。また、第 1 式のみ満たす (すなわち、必ずしも各 e_j が単位ベクトルであるとは限らない) 場合は、直交系であると言います。

ここで、クロネッカーのデルタと呼ばれる記号

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(コンマ抜きでδ_{ij} と表すことも多い) を用いれば、上の条件は、まとめて

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j} \tag{1.2}$$

と表すことができます。(式番号が飛んでいるのは、教科書に合わせているためです。)

注意：$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は、m 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ の標準ベクトル(の内の n 個)

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} (\leftarrow \text{第 } n \text{ 成分})$$

の意味で用いられることが多く、また、これらのベクトルの組は、条件 (1.2) を満たしますが、ここでは、より一般に、条件 (1.2) を満たす任意のベクトルの組の意味に用いていることに注意して下さい。

さて、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し、これを、条件 (1.2) を満たす一般の正規直交系$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の一次結合

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

で近似することを考えてみましょう。ここで最もよい近似とは、$\boldsymbol{v}$ との距離(またはその二乗) が最も小さいものとします。

具体的な例で言えば、実際には高さにも差がある地表上の点を、とりあえず高さの違いは無視して、平面上の地図に落として表すなら、どのような座標が取れるかと言うことです。普通に真下に垂直に落として座標を入れれば、誤差は標準的な高さ(例えば標高0m) の地点との高さの差のみになります。(ここでは、地球が丸いことは忘れて、話をしています。)

一般に、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j$ の距離の二乗は

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}||^2 &= ||\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j||^2 \\
&= (\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - 2(\boldsymbol{v}, \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j) + (\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j, \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - 2(\boldsymbol{v}, \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j) + (\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k) \\
&= ||\boldsymbol{v}||^2 - 2\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) x_j x_k \\
&= ||\boldsymbol{v}||^2 - 2\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} x_j x_k \\
&= ||\boldsymbol{v}||^2 - 2\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) x_j + \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(x_j - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j))^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 - \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j)^2$$

と表されます。

　最後の式は、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数として平方完成された２次式なので、最小値は

$$x_j = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

でとり、$\boldsymbol{v}$ に最も近い一次結合は

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e_j} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e_1} + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e_2} + \cdots + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e_n}$$

で与えられます。

注意：最小値をとる所では、全ての偏微分が消えるはずなので、

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(||\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j||^2) = 2x_j - 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

としても求められます。

ちなみに、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が上述の標準ベクトルの場合、この近似は、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j \boldsymbol{e_j} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{を} \quad \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e_j} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

で近似することを意味しています。(この場合 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) = v_j$ $(j = 1, \ldots, n)$)

ちなみに近似の誤差は

$$\epsilon_n = ||\boldsymbol{v}||^2 - \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j)^2$$

となります。(前頁の注意後半の例で言うと $\epsilon_n = {v_{n+1}}^2 + \cdots + {v_m}^2$)

特に $m = n$, すなわち、正規直交系をなすベクトルの個数がベクトル空間の次元と同じとき、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を正規直交基と言い、任意の v は、近似でなく、ちょうど

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_j$$

と表されるため、誤差もありません。

この講義の目的を一言で言うと、これと同じことを、適当な条件を満たす関数全体がなすベクトル空間で考えたいと言うことです。

ここでベクトル空間と言うのは、(やや雑な言い方をすると) 加法とスカラー倍が、分配法則が成り立つように定義されている集合のことを言います。この意味では、数ベクトル空間だけでなく、例えば実数全体 $\mathbf{R}$ またはその部分集合である区間上で定義された関数全体の集合もベクトル空間と見なせます。

　ただ、その元である個々の関数をベクトルと見なすのは、最初の内は直感的に難しいかもしれません。しかし、これまで扱って来た n 次元数ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を、1 から n までの n 個の自然数に対し、それぞれ実数 $v_1, \ldots, v_n$ を一つずつ対応させた、言わば有限数列を並べたものと見なせば、全ての実数 x に対して、それぞれ実数 $f(x)$ を一つずつ対応させる関数は、単に添字の数が無限個になっただけで、そう遠い存在と言う訳でもないでしょう。

ただし、n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ では、うまく有限個の元を選べば、それらの一次結合で全ての元が表せましたが、関数たちのなすベクトル空間では、一般には、そのようなことは不可能です。実際、互いに一次結合では表せない一次独立な関数が無限個存在します。

そのことは、全ての関数のなすベクトル空間では言うまでもありませんが、例えば、閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数全体のなす空間に限っても、やはり無限次元のベクトル空間となり、これまで線形代数で学んで来た有限次元のベクトル空間より、扱いが難しくなります。

それでも、そのような空間にも、数ベクトル空間とよく似た性質を持つ内積を、次のように定義することができます。

$$(f,g)_2 = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

この内積を L^2 内積と呼びます。

n 次元数ベクトルでは、第 1 成分から第 n 成分まで、各成分毎の積を足し合わせることで内積を定義しましたが、関数の場合に同じ操作を実行しようとすると、同じ x に対応する値どうしの積を無限個足し合わせなければならないので、L^2 内積では、和 $\sum_{j=1}^{n}$ の代わりに積分 $\int_a^b$ を用いている訳です。

二つの関数の間の距離も、L^2 内積から自然に定まる L^2 ノルム(ノルム＝ベクトルの大きさ) を用いて

$$||f-g||_2=\sqrt{(f-g,f-g)_2}=\left\{\int_a^b(f(x)-g(x))^2dx\right\}^{1/2}$$

で測ることができます。

また、これらの内積とノルムについても、次のシュワルツの不等式が成り立ちます。

$$|(f,g)_2|\leq ||f||_2\cdot ||g||_2$$

すなわち

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left\{\int_a^b f(x)^2dx\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b g(x)^2dx\right\}^{1/2}$$

関数のなす無限次元のベクトル空間上に定義される内積やノルム、距離等は一通りではありません。その目的や用途によって、さまざまなタイプのものが導入されます。

そのような対象を扱う無限次元の線形代数は、通常、関数解析と言う科目で扱われるのですが、その内容を理解するためには、その前にも多くの準備が必要になります。そこで、この講義では、フーリエ解析の理解に必要な最少限のもののみご紹介し、時間の制約上、あまり深入りはすることなく、いくつかの重要な定理や公式は証明抜きで認めて、話を進めたいと思います。