応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第２回}}$

(2024年10月9日(水)配信分)

微積分の準備

一般の関数を、初等関数の重ね合わせで近似し、誤差を評価した上、さらに無限級数によって、誤差の無い正確な表示を試みる、と言った一連の手法で、最初に学ぶのは、微積分の講義で出て来たはずのテイラー展開($x=0$ が中心の場合はマクローリン展開とも言います) でしょう。

その最初のステップは、関数 $f(x)$ の、多項式、つまり $1, x, x^2, \ldots, x^n$ の一次結合

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

による近似です。

ここで、係数 a_k $(k=0,1,\ldots,n)$ は、展開の中心(この場合は $x=0$) における関数 $f(x)$ 自身の値だけでなく、n 階までの各微分係数(導関数の値) まで一致する、つまり $f_n^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$ が成り立つように

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

と定められます。このことは、中心付近での挙動(増減、凹凸など)が最も近いものを選ぶことを意味します。その結果、中心付近の近似の精度は、極めて高いものになります。

この近似は n 次式による近似なので、n 次近似と言います。

もっとも、多項式(ここでは、定数関数や単項式を含めます) 以外の関数は、多項式とは決して一致しませんから、どんな n 次近似もあくまで近似でしかなく、近似の精度を上げようと思えば、n を限りなく大きく取り換えてゆく必要があり、さらに、全ての x に対し、値をぴったり一致させようと思えば、無限和である級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を考える必要があります。これは関数列 $f_n(x)$ の極限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

を意味しています。

ただし、ここで極限を取ったからと言って、元の関数 $f(x)$ に完全に一致するとは限らず、実際、特別な良い性質を持った関数以外は、完全に一致させることはできません。もっとも、通常よく扱う初等関数は皆、少なくとも展開の中心付近では、この良い性質を持っています。

そして、$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するような x の範囲を収束域と言い、中心から収束域の境界までの距離を収束半径と言います。

(求め方を忘れた人は、各自で復習しておきましょう。)

例えば、有理関数$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開は、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

ですが、この展開の収束半径は 1 です。これは、この関数 $f(x)$ が$x=1$ で定義されないことからも極めて自然なことです。実際、この級数は開区間 $(0-1, 0+1) = (-1, 1)$ でしか収束しません。

ところが、同じく有理関数である$g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

の収束半径も、やはり 1 です。この関数 $g(x)$ は実数全体で定義されているので、ちょっと不思議な感じがするかもしれませんが、これは実はこの関数を複素数に拡張して考えた$g(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ が $z=\pm i$ で定義されないことに関係しています。

注意：$g(x)$ のテイラー展開は、$f(x)$ のテイラー展開を用いて、容易に導けます。

$$\begin{aligned} g(x)=f(-x^2) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \\ &=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \end{aligned}$$

この関係を見れば、$|-x^2|<1$ でしか収束しないのも頷けます。

一方、指数関数 e^x の $x=0$ におけるテイラー展開は、

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられ、その収束半径は ∞, すなわち、この級数は全ての実数 x について収束します。しかし、$x \to \infty$ のときの指数関数の値の増大度は、どんな多項式よりも速く、x が大きければ大きいほど、n 次近似

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

の誤差は大きい、つまり収束は遅いことになります。

テイラー展開による n 次近似の誤差は、一般に剰余項と呼ばれ、様々な表し方が知られていますが、ここでは、それを知らないものとして、指数関数の n 次近似の誤差を、上から評価(つまり高々この程度と見なせる範囲を求めること) してみましょう。

$$
\begin{aligned}
|e^x - f_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} + \cdots\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} |x|^{k-(n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1+\ell)!} |x|^{\ell}
\end{aligned}
$$

(↑ $\ell = k - (n+1)$ とおいた)

$$
\leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} |x|^{\ell}
$$

(↑ $\ell!(n+1)! \leq (n+1+\ell)!$ を用いた)

$$
= \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} e^{|x|}
$$

　このことから、任意の正の実数 R に対し、少なくとも $x \in [-R, R]$ においては、誤差は

$$|e^x - f_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} R^{n+1} e^R$$

で、上から評価されることがわかります。ここで右辺は、$n \to \infty$ のとき、0 に収束します。

　このように関数列 $f_n(x)$ の関数 $f(x)$ への収束の速さが、x によらず、ある実数列 c_n の 0 への収束で上から

$$|f_n(x) - f(x)| \leq c_n \to 0$$

のように評価されるとき、関数列 $f_n(x)$ は関数 $f(x)$ に一様収束すると言います。

(x によらない c_n はとれない(かもしれない)ものの、各 x において、$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するときは、各点収束すると言います。)

上の場合で言えば、関数列 $f_n(x)$ は、指数関数 e^x に、閉区間 $[-R, R]$ で一様収束すると言うことです。

ここで R は任意にとれますが、R が大きければ大きいほど、評価する実数列も収束が遅いものに取り替える必要があり、関数列 $f_n(x)$ は、指数関数 e^x に、実数全体では一様収束するわけではありません。

このような場合、$f_n(x)$ は、指数関数 e^x に $\mathbf{R}$ 上広義一様収束すると言います。

注意：平均値の定理を一般化した代表的な剰余項の一つであるラグランジュの剰余項による表示

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(k)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(ただし θ は $0<\theta<1$ を満たすある実数で、x には依存します。重要なのは、θx が 0 と x の間のどこかに必ずあると言うことです。）を用いれば、指数関数の場合には

$$e^x=f_n(x)+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

より、上の評価は

$$\begin{aligned}|e^x-f_n(x)|&=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \;=\; \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\\ &\le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \;\le\; \frac{e^{R}}{(n+1)!}R^{n+1}\end{aligned}$$

と、容易に導けます。

指数関数 e^x のテイラー展開は、実は複素数に拡張しても、全ての複素数 z について収束します。従って、級数

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \cdots + \frac{1}{n!} z^n + \cdots$$

により、指数関数を複素平面 $\mathbf{C}$ 全体に拡張して定義することができます。

ここで、この拡張について、

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

が成り立ちます。

ここで$x=0$ とおけば、オイラーの公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

で、この y を $\pm x$ に置き換えて得られる

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

を用いると、指数関数を用いた三角関数の表示

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が得られます。

一方、指数関数のテイラー展開より

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k \\ &= \sum_{k=0;k\text{は偶数}}^{\infty} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}x^k + i \sum_{k=1;k\text{は奇数}}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}x^k \\ e^{-ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-ix)^k \\ &= \sum_{k=0;k\text{は偶数}}^{\infty} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}x^k - i \sum_{k=1;k\text{は奇数}}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}x^k \end{aligned}$$

が成り立つので、三角関数について、次のテイラー展開が得られます。

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0;k\text{ は偶数}}^{\infty} \frac{(-1)^{k/2}}{k!} x^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} x^{2\ell} \qquad (\leftarrow k = 2\ell \text{ とおいた}) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \\
\sin x &= \sum_{k=1;k\text{ は奇数}}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!} x^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \qquad (\leftarrow k = 2\ell + 1 \text{ とおいた}) \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots
\end{aligned}
$$

指数関数のテイラー展開の収束半径が ∞ であることから、これらの展開も、収束半径は ∞ であり、全ての実数について収束します。

特に $\cos x$ は偶関数($\cos(-x) = \cos x$ で、グラフが y 軸について線対称) なので、展開には偶数次の項しか現れず、一方 $\sin x$ は奇関数 ($\sin(-x) = -\sin x$ で、グラフが原点について点対称) なので、展開には奇数次の項しか現れないことに、注意しておきましょう。