# 応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第３回}}$

(2024年10月16日(水)配信分)

$\boxed{\text{関数解析の準備}}$

　前回は、関数 $f(x)$ のテイラー展開によって得られる $n$ 次近似 $f_n(x)$ と $f(x)$ 自身との誤差を、任意の $R > 0$ に対し、閉区間 $[-R, R]$ 上での $|f(x) - f_n(x)|$ を $x$ によらない実数列で評価することを考え、広義一様収束と言う、通常の各点収束よりも良い性質を持つ収束の概念を導入しました。

　一般に関数空間において、二つの関数の間の距離を計る方法は様々ですが、その内の一つが $L^\infty$ 距離と呼ばれるもので、次のように、二つの関数の差の $L^\infty$ ノルムを用いて定義されます。

[$L^\infty$距離]： $\mathbf{R}$ 全体またはその部分集合(主に区間) $I$ 上で定義された関数 $f$ と $g$ に対し、

$$||f - g||_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

(左辺は $x$ によらないので、通常は $(x)$ は書きません。)

ここで、右辺で用いられている $\sup$ は、次のように定義されます。

まず、$I$ 上で定義された関数 $h$ に対し、一般に

$$h(x) \leq C \qquad (x \in I)$$

を満たす実数 $C$ を、( $I$ における) $h$ の上界と呼びます。そして、上界の中で最小のものを上限と呼び

$$\sup_{x \in I} h(x)$$

と表します。実際には、上界がそもそも存在しないこともあり、その場合には、上限は $\infty$ であると考えます。

$h$ が $I$ 上で最大値を持つときは、最大値が上限になります。例えば $I$ が有限閉区間で、$h$ が $I$ 上連続のとき、$h$ は $I$ 上で必ず最大値を持つ ( $h$ の最大値を実現する $x \in I$ が、少なくとも一つは存在する) ので、

$$\sup_{x \in I} h(x) = \max_{x \in I} h(x)$$

が成り立ちます。

一方、$I$ が開区間や無限区間の場合には、たとえ $h$ が $I$ 上連続であっても、最大値を持つとは限りません。しかし、少なくとも一つ上界を持つ (このとき、$h$ は $I$ 上上に有界であると言います) ならば、有限な値で上限が定義されます。この意味で、上限は最大値の自然な一般化になっています。

上の $h$ として $|f-g|$ をとったものが、

$$||f-g||_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)|$$

であり、具体的には

$$|f(x)-g(x)| \leq C \qquad (x \in I)$$

を満たすような $C$ の内、最小のものと言うことになります。特に $I$ が有限閉区間で、$f$, $g$ が共に $I$ 上連続のときには、$|f-g|$ の上限は最大値と一致し、

$$||f-g||_\infty = \max_{x\in I} |f(x)-g(x)|$$

が成り立ちます。そして、一様収束は、ちょうどこの $L^\infty$ 距離に関する収束

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

になっています。

ここで、なぜ $L^\infty$ と呼ぶのかと言うと、一般に $p \geq 1$ に対し、次のように、二つの関数の差の $L^p$ ノルムによって定義される $L^p$ 距離に対して、$L^\infty$ が、その $p \to \infty$ のときの極限に対応していることによります。

$[L^p$距離$]$： $\mathbf{R}$ 全体またはその部分集合(主に区間) $I$ 上で

定義された関数 $f$ と $g$ に対し、

$$||f-g||_p = \left(\int_I |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

一般には、そもそも積分の値が存在しない(必ずしも $\infty$ に発散すると言う意味とは限らず、そもそも関数 $|f-g|^p$ の積分の値が定まらない) こともあるので、任意に与えられた $f, g$ に対して、この距離が定義されるとは限りません。しかし $I$ が有限閉区間で、$f, g$ が共に $I$ 上連続のときは、必ず有限な値が得られます。

　関数列 $\{f_n\}$ と関数 $f$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}||f_n - f||_p = 0$$

が成り立つとき、$\{f_n\}$ は $f$ に $L^p$ 収束すると言います。(教科書の表現を借りると、$\{f_n\}$ は $f$ に $p$ 次平均収束する、または、$\{f_n\}$ は $f$ の $p$ 次平均近似である、と言うことになります。)

　それぞれの距離について、収束するしないは変わって来るのですが、中でも今後最も重要になって来るのは、第 1 回でも少し言及した $p = 2$ の場合です。

$L^2$ 収束については、一旦おいておいて、ここで教科書に出ている一様収束( $L^\infty$ 収束) の重要な性質を、言い方を変えて列挙しておきましょう。

**定理1-1**

区間 $I$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が関数 $f$ に一様収束するならば、$f$ も区間 $I$ 上連続である。

この場合 $I$ は $\mathbf{R}$ でも構いません。また $\mathbf{R}$ 上は一様収束しなくても、$\mathbf{R}$ 上広義一様収束する(すなわち、任意の $R > 0$ に対し、$\{f_n\}$ が閉区間 $[-R, R]$ 上 $f$ に一様収束する) ならば、$f$ も $\mathbf{R}$ 上連続になります。

証明には、$\epsilon$-$\delta$ 論法による議論が必要ですが、それほど複雑ではないので、一応ご紹介しておきましょう。

(証明)

示すべき主張の「 $f$ は $I$ 上連続」は、「任意の $x_0 \in I$ に対し、$f$ が $x_0$ で連続」であることを意味し、「 $f$ が $x_0$ で連続」は、厳密には次のように述べられます。

> 任意の $\epsilon > 0$ に対し、(一般には $\epsilon$ に依存する) $\delta > 0$ で、
> $$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (|x - x_0| < \delta)$$
> を満たすようなものが存在する。

(これは、しばしば

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

のように略記されます。ちなみにs.t. は such that の略。)

今、仮定から各 $f_n$ も $I$ 上連続なので、これと同じ条件を満たす訳ですが、$f_n$ によって、(言い換えれば$n$ によって) $\delta$ は異なって来るので、これを $\delta_n$ と書いて区別することにします。

一方、今、仮定より $f_n$ は $I$ 上 $f$ に一様収束するので、$0$ に収束する実数列 $c_n$ で、

$$|f_n(x) - f(x)| \leq c_n$$

を満たすものが存在します。

ここで、「$c_n$ が $0$ に収束する」は、厳密には次のように述べられます。

任意の $\epsilon > 0$ に対し、(一般には $\epsilon$ に依存する) $N \in \mathbf{N}$ で、

$$|c_n| < \epsilon \qquad (n \geq N)$$

を満たすようなものが存在する。

(これは、しばしば

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0 \text{ s.t. } n \geq N \Longrightarrow |c_n| < \epsilon$$

のように略記されます。)

さて、ここで一般に、不等式

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= |(f(x)-f_n(x))+(f_n(x)-f_n(x_0))+(f_n(x_0)-f(x_0))| \\
&\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \\
&\leq c_n+|f_n(x)-f_n(x_0)|+c_n \\
&= |f_n(x)-f_n(x_0)|+2c_n
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注意します。

今、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$N\left(\frac{\epsilon}{3}\right) \in \mathbf{N}$ をとれば、任意の $n \geq N\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$ に対して $c_n < \frac{\epsilon}{3}$ が成り立ちます。

ここで、このような $n$ を一つ固定します。(例えば$n = N\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$ でも可。) すると、その $n$ に対して、$f_n$ は $x_0$ で連続なので、同上の $\epsilon$ に対して、$\delta_n\left(\frac{\epsilon}{3}\right) > 0$ で、

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \left(|x - x_0| < \delta_n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right)$$

を満たすようなものが存在します。

よって、

$$\delta(\epsilon) = \delta_n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$$

とおけば、$\delta(\epsilon) > 0$ であり、$|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ のとき、

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2c_n \\ &< \frac{\epsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{3} \ = \ \epsilon \end{aligned}$$

が成り立ち、主張が示されました。□

　区間 $I$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が関数 $f$ に各点収束はするが、一様収束はしない場合には、$f$ も区間 $I$ 上連続になるとは限りません。

　例えば、閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列として、$\{x^n\}$ (の定義域を $[0,1]$ に制限したもの) を考えると、その極限関数は

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

となり、$x=1$ で連続ではありません。

　実際、$[0,1]$ 上の関数列 $\{x^n\}$ の、この関数への収束は、一様収束ではなく、$x$ が $1$ に近ければ近いほど、収束の速さは遅くなっています。

$\boxed{\text{定理}\mathbf{1\text{-}2}}$

有限閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が関数 $f$ に一様収束するならば、$f_n$ の $I$ 上の積分(のなす数列) も、$f$ の $I$ 上の積分に収束する。

(証明)

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \quad (= ||f_n - f||_1) \\
&\leq \int_a^b \max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|dx \\
&= \int_a^b dx \cdot \max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \\
&= (b-a)\cdot ||f_n - f||_\infty \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

$\square$

これが、あくまでも有限閉区間の場合であることには、注意が必要です。

例えば、$\mathbf{R}$ 全体で定義された連続関数

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{n} & \left(|x| \leq \dfrac{n\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| \geq \dfrac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

に対し、$n \in \mathbf{N}$ によらず、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = \int_{-n\pi/2}^{n\pi/2} \frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}dx \ &= \ \left[\ \sin\frac{x}{n}\ \right]_{-n\pi/2}^{n\pi/2} \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ = \ 1-(-1) \ = \ 2 \end{aligned}$$

が成り立ちますが、一方、関数列 $\{f_n\}$ は、定数関数としての $0$ に一様収束し、その $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上での積分の値は $0$ で、定理 1-2 の結論は成り立ちません。

一方、有限閉区間については、同様の計算から、いろいろなことが見えて来ます。

例えば、上の証明を途中から見れば、有限閉区間 $I=[a,b]$ 上の絶対可積分な関数の列 $\{f_n\}$ が絶対可積分な関数 $f$ に一様収束するならば $L^1$ 収束することも、同時に読み取れます。

ほぼ同様にして、有限閉区間 $I=[a,b]$ 上の 2 乗積分可能な関数の列 $\{f_n\}$ が 2 乗積分可能な関数 $f$ に一様収束するならば $L^2$ 収束することも、示すことができます。

$$
\begin{aligned}
||f_n - f||_2^2 &= \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \\
&\leq \int_a^b \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \\
&= \int_a^b dx \cdot \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|^2 \\
&= (b-a)\cdot ||f_n - f||_\infty^2 \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{定理}\mathbf{1\text{-}3}}$ (ワイエルシュトラスの優級数判定法)

　区間 $I$ 上の関数列 $\{f_n\}$ において、$|f_n(x)|$ がある実数 $C_n$ で上から評価され、かつ無限数列の和 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ が収束する(すなわち部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$ のなす数列 $\{S_n\}$ が有限値に収束する) ならば、関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ も $I$ 上一様収束する(すなわち部分和 $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ のなす関数列 $\{g_n\}$ も $I$ 上のある関数に一様収束する) 。

(証明)

　各 $x \in I$ に対し、( $x$ を固定する毎に) 数列 $\{f_n(x)\}$ において、仮定より、

$$|f_n(x)| \leq C_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

より、

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} C_k = S_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立ちます。

　ここで $C_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ より $\{S_n\}$ は単調増加数列なので、$S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n$ とおけば、$S_n \leq S_\infty$ $(n \in \mathbf{N})$ が成り立ちます。
よって、

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq S_\infty \qquad (n \in \mathbf{N})$$

も成り立ち、$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ は上に有界な単調増加数列となり、(有限な) 極限値を持つことがわかります。

従って、各 $x \in I$ 毎に、級数$\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)(= g_n(x))\right\}$ が絶対収束するので、数列$\{g_n(x)\}$ も収束します。その極限値を$g_\infty(x)$ とおくと、$I$ 上で定義された関数$g_\infty$ が得られます。

ここで、

$$\begin{aligned}
|g_\infty(x) - g_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k - \sum_{k=1}^{n} C_k \\
&= S_\infty - S_n \qquad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

が、全ての $x \in I$ について成り立ち、一方、数列$\{S_\infty - S_n\}$ は $0$ に収束するので、関数列 $\{g_n\}$ は $g_\infty$ に$I$ 上一様収束します。□