応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第４回}}$

(2024年10月23日(水)配信分)

フーリエ級数

さて、第２回で見たテイラー展開に、ちょっと話を戻しましょう。指数関数 e^x の近似で、展開の中心 $x = 0$ から遠ざかるほど誤差が大きくなるのは、指数関数の値の増大度を考えると仕方のないことです。しかし三角関数 $\cos x$, $\sin x$ は、いずれも周期関数であり、同じ値を繰り返し、遠くへ行っても値が大きくなるわけではないのに、誤差が大きくなってしまうのは、ある意味効率が悪いと言えます。

これはそもそも、周期関数を近似するのに、周期が無く、限りなく増大(または減少) して行く多項式を用いるからであって、周期関数を近似する場合には、寧ろ、多項式に次いで性質がいろいろよくわかっている $\cos x$, $\sin x$ を用いて、他の関数を近似した方がよいのでは、ということで考え出されたのが、この講義の主題であるフーリエ級数です。

とりあえず、周期 2π すなわち、条件

$$f(x+2\pi)=f(x) \quad (x\in\mathbf{R}) \tag{4.1}$$

を満たす関数に限定して考えます。

注意：一般の周期については、一次関数による座標変換で書き換えるだけで済むので、後でまとめて説明します。

ここで x は任意なので、条件 (4.1) の x に $x\pm 2\pi$ を繰り返し代入することで、実際には

$$f(x+2m\pi)=f(x) \quad (x\in\mathbf{R}; m\in\mathbf{Z}) \tag{4.2}$$

が成り立つことが導かれます。

　条件 (4.2) を満たす関数で、$\cos x$, $\sin x$ を用いて簡単に表せるものと言えば

$$\cos kx,\ \sin kx \quad (k \in \mathbf{N})$$

でしょう。$k \geq 2$ の場合にはより細かい周期 $\dfrac{2\pi}{k}$ を持つものたちですが、少なくとも 2π 毎に同じ値を繰り返すことは共通しています。

　これに定数関数 1 を加えたものを、テイラー展開の場合の 1, x^k $(k \in \mathbf{N})$ の代わりにして、一般に周期 2π の関数 S を

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \tag{4.3}$$

の形で表す、または $k = n$ までの部分和で近似することを試みてみましょう。

　これがまさにフーリエ級数なのですが、まだ特定の関数を近似する前段階なので、とりあえず、この形の関数項級数を三角級数、部分和を三角多項式と、それぞれ呼んでおきます。

注意：定数項を a_0 ではなく $\frac{a_0}{2}$ としているのは、慣例に従うもので、その理由は後に明らかになります。(教科書では、この表記は定理1-4から。)

ここでは、近似の誤差を、前回導入した L^2 距離で測ることにします。これに併せて、周期 2π の関数たちがなすベクトル空間において、二つの関数 S と T の内積は、L^2 内積

$$(S,T)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} S(x)T(x)dx$$

各関数 S のノルムは、L^2 ノルム

$$||S||_2 = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} S(x)^2 dx\right\}^{1/2}$$

を用います。この内積やノルムを用いれば、$\mathbf{R}^n$ の通常の距離、内積、ノルムと同様に、L^2 距離は、

$$||S-T||_2 = (S-T, S-T)_2^{1/2}$$

と表せます。

そこで、この講義の第１回で準備した n 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ におけるベクトルの、正規直交系の一次結合による近似と同様の定式化を試みます。

まず

$$1, \cos kx, \sin kx \quad (k \in \mathbf{N})$$

を、一周期分の有限閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上に制限して、この内積に関する正規直交系に直します。とりあえず、便宜上

$$\phi_k(x) = \cos kx, \psi_k(x) = \sin kx \quad (k \in \mathbf{N})$$

とおいて、これらの関数の内積を計算すると…

まず任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
(1, \phi_k)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx dx \\
&= \left[\frac{1}{k} \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 - 0 \ = \ 0 \\
(1, \psi_k)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx dx \\
&= \left[-\frac{1}{k} \cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{k}\{(-1)^k - (-1)^k\} \ = \ 0
\end{aligned}$$

相異なる $k, \ell \in \mathbf{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\phi_k, \phi_\ell)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-\ell)x + \cos(k+\ell)x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k-\ell}\sin(k-\ell)x + \frac{1}{k+\ell}\sin(k+\ell)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\{(0+0)-(0+0)\} \ = \ 0 \\
(\psi_k, \psi_\ell)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin \ell x dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k-\ell}\sin(k-\ell)x - \frac{1}{k+\ell}\sin(k+\ell)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\{(0-0)-(0-0)\} \ = \ 0
\end{aligned}
$$

また任意の $k,\ell\in\mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(\psi_k,\phi_\ell)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos\ell x dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(k-\ell)x+\sin(k+\ell)x}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k-\ell}\cos(k-\ell)x-\frac{1}{k+\ell}\cos(k+\ell)x\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^{k-\ell}-(-1)^{k-\ell}}{k-\ell}+\frac{(-1)^{k+\ell}-(-1)^{k+\ell}}{k+\ell}\right\}\ =\ 0\end{aligned}$$

より、$1,\ \phi_k,\ \psi_k\ (k\in\mathbf{N})$ は、L^2 内積について、互いに直交していることがわかります。

上の諸条件を満たす関数の組を直交関数系と言います。

後は、それぞれの関数を L^2 内積に関する大きさで割って、L_2 ノルムに関する単位ベクトルにしてやれば、正規直交関数系にすることができます。

ここで、

$$\begin{aligned} ||1||_2^2 = (1,1)_2 \ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx \\ = [x]_{-\pi}^{\pi} \ &= \ 2\pi \end{aligned}$$

また任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned} ||\phi_k||_2^2 = (\phi_k, \phi_k)_2 \ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx \\ = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi} \ &= \ \frac{(\pi+0)-(-\pi+0)}{2} \ = \ \pi \\ ||\psi_k||_2^2 = (\psi_k, \psi_k)_2 \ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2} dx \\ = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi} \ &= \ \frac{(\pi-0)-(-\pi-0)}{2} \ = \ \pi \end{aligned}$$

より、

$$||1||_2 = \sqrt{2\pi}, \qquad ||\phi_k||_2 = ||\psi_k||_2 = \sqrt{\pi} \quad (k \in \mathbf{N})$$

です。

従って

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \quad (k \in \mathbf{N})$$

が正規直交関数系をなすことになります。

しかしながら、この係数がついているとかえって扱いづらいこともあり、通常は「正規」でない直交関数系を用います。

今、関数 $S(x)$ が (4.3) の形で表され、この三角級数の収束が一様収束だったと仮定します。このとき、定理1-2より、極限操作(この場合は $\sum_{k=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$ のこと) と積分は順序交換可能なので、

$$
\begin{aligned}
(S,1)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}\right]dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}dx \\
&= a_0\pi
\end{aligned}
$$

また任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
(S, \phi_k)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos kx dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ a_\ell \cos \ell x \cos kx + b_\ell \sin \ell x \cos kx \} \right] dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{ a_\ell \cos \ell x \cos kx + b_\ell \sin \ell x \cos kx \} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx dx \; = \; a_k \pi \\
(S, \psi_k)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin kx dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ a_\ell \cos \ell x \sin kx + b_\ell \sin \ell x \sin kx \} \right] dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin kx dx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{ a_\ell \cos \ell x \sin kx + b_\ell \sin \ell x \sin kx \} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin^2 kx dx \; = \; b_k \pi
\end{aligned}$$

より、各係数は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos kx dx \qquad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin kx dx \qquad (k \in \mathbf{N})$$

で与えられます。(定理1-4)

注意：(混乱しそうと思う人は、とりあえずこの注意は読み飛ばして下さい。)
正規直交系は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \quad (k \in \mathbf{N})$$

なので、これを用いて表し直すと、

$$S(x) = \frac{a_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\sqrt{\pi} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

ですが、一方

$$\begin{aligned}
\left(S, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(S,1)_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0\pi &= \frac{a_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \\
\left(S, \frac{\phi_k}{\sqrt{\pi}}\right)_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(S,\phi_k)_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}a_k\pi &= a_k\sqrt{\pi} \\
\left(S, \frac{\psi_k}{\sqrt{\pi}}\right)_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(S,\psi_k)_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}b_k\pi &= b_k\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

で、確かに L^2 内積により係数が得られます。

ここで、$||S||_2$ は、次で求められます。

$$\begin{aligned}
||S||_2^2 &= (S, S)_2 \\
&= \left(S, \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \phi_k + b_k \psi_k)\right)_2 \\
&= \left(S, \frac{a_0}{2} \cdot 1\right)_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{(S, a_k \phi_k)_2 + (S, b_k \psi_k)_2\} \\
&= \frac{a_0}{2}(S, 1)_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k (S, \phi_k)_2 + b_k (S, \psi_k)_2\} \\
&= \frac{a_0}{2} a_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a_k \pi + b_k b_k \pi) \\
&= \frac{{a_0}^2 \pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ({a_k}^2 + {b_k}^2) \pi
\end{aligned}$$

この公式をパーセヴァルの等式と言います。(定理1-5,2-6)

さて、今、任意に与えられた周期 2π の関数 f を、三角級数で L^2 近似することを考えてみましょう。そこで、まず任意に(収束しない恐れのない) n 次の三角多項式を

$$S_n(x) = \frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{x_k \cos kx + y_k \sin kx\}$$

とおきます。ここで、係数を a_k, b_k を x_k, y_k (教科書では ξ_k, η_k) に変えたのは、この係数を変数と見て、誤差を最小化したいためです。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}(f, \phi_k)_2 \qquad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}) \\ b_k &= \frac{1}{\pi}(f, \psi_k)_2 \qquad (k \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

とおいておきます。

$$
\begin{aligned}
||f - S_n||_2^2 = (f - S_n, f - S_n)_2 \ &= \ (f, f)_2 - 2(f, S_n)_2 + (S_n, S_n) \\
&= ||f||_2^2 - 2\left(f, \frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(x_k\phi_k + y_k\psi_k)\right)_2 + ||S_n||_2^2 \\
&= ||f||_2^2 - 2\left\{\frac{x_0}{2}(f, 1)_2 + \sum_{k=1}^{n}(x_k(f, \phi_k)_2 + y_k(f, \psi_k)_2)\right\} \\
&\qquad\qquad + \left\{\frac{{x_0}^2\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}({x_k}^2 + {y_k}^2)\pi\right\} \\
&= ||f||_2^2 - 2\left\{\frac{x_0}{2}a_0\pi + \sum_{k=1}^{n}(x_k a_k\pi + y_k b_k\pi)\right\} \\
&\qquad\qquad + \left\{\frac{{x_0}^2\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}({x_k}^2 + {y_k}^2)\pi\right\} \\
&= ||f||_2^2 - \pi\left\{\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}({a_k}^2 + {b_k}^2)\right\} \\
&\qquad\qquad + \pi\left[\frac{(x_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{(x_k - a_k)^2 + (y_k - b_k)^2\}\right]
\end{aligned}
$$

この式は、$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ の関数として平方完成された２次式なので、誤差が最も小さい近似は

$$x_k = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \qquad y_k = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

で与えられます。(定理1-6,1-7)

このとき、近似の誤差は

$$\epsilon_n = ||f||_2^2 - \pi \left\{ \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} ({a_k}^2 + {b_k}^2) \right\}$$

となります。

(この求め方は、この講義の第１回最初の計算と、全く同じであることを思い出しておきましょう。)

　このようにして選んだ a_k, b_k で与えられる級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

を、関数 f の**フーリエ級数**、a_k, b_k を f の**フーリエ係数**と呼びます。

　ただし、少なくとも現段階では、これはあくまで近似であって、$n \to \infty$ としても誤差 ϵ_n が 0 に収束し、$\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が $f(x)$ に一致するために、さらにどのような条件が必要かを考えなければなりません。これが次の課題です。

注意：特に $f(x)$ が偶関数($f(-x) = f(x)$)のときは、$b_k = 0$ $(k \in \mathbf{N})$ で、a_k の項だけの**フーリエ余弦級数**、一方 $f(x)$ が奇関数($f(-x) = -f(x)$)のときは、$a_k = 0$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ で、b_k の項だけの**フーリエ正弦級数**になります。