応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第５回}}$

(2024年10月30日(水)配信分)

$\boxed{\text{基本的な例}}$

今回は、簡単な関数に関するフーリエ級数の基本的な例を、個別にではなく、互いの関連性に注目しながら、見ていきましょう。

f_A は

$$f_A(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数とします。(教科書 §1.2.2 の最初の f です。) 収束するかどうかの検討は後回しにして、とりあえず形式的に f_A のフーリエ級数 S_A を求めてみましょう。

f_A は不連続点 $x = m\pi$ (m : 奇数) を除けば奇関数なので、

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \ = \ 0 \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$$

が成り立ち、S_A はフーリエ正弦級数になります。

今、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x\frac{-\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos kx}{k}dx\right\} \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \quad (k \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

より、f_A の L^2 近似を与える n 次の三角多項式は、

$$\begin{aligned}
S_{An}(x) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx \quad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

です。

ここで

$$||f_A||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \ = \ \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \ = \ \frac{2\pi^3}{3}$$

より、近似の誤差は

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &= ||f_A||_2^2 - ||S_{An}||_2^2 \\
&= \frac{2\pi^3}{3} - \pi \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 \\
&= \frac{2\pi^3}{3} - \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2} \quad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

で、これが $n \to \infty$ のとき 0 に収束すれば、S_{An} は f_A に L^2 収束することになります。(このことは後で考えます。)

さて、ここで

$$\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\cos kx\cos\frac{x}{2}\quad(k\in\mathbf{N})$$

より、

$$\begin{aligned}
S_{A_n}'(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2(-1)^{k+1}\cos kx \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\} \\
&= 1+(-1)^{n+1}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}}\quad(n\in\mathbf{N})
\end{aligned}$$

なので、$-\pi < x < \pi$ に対して

$$
\begin{aligned}
S_{An}(x) &= S_{An}(0) + \int_0^x S_{A'_n}(t)dt \\
&= 0 + x + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\cos \frac{t}{2}} dt \\
&= x + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{\cos nt \cos \frac{t}{2} - \sin nt \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} dt \\
&= x + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\cos nt - \sin nt \tan \frac{t}{2}\right) dt \\
&= x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - (-1)^{n+1} \int_0^x \sin nt \tan \frac{t}{2} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \\
&\qquad -(-1)^{n+1}\left\{\left[\frac{-\cos nt}{n}\tan\frac{t}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-\cos nt}{n}\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt\right\} \\
&= x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \\
&\qquad +\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx\tan\frac{x}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\int_0^x \frac{\cos nt}{\cos^2\frac{t}{2}}dt \\
&\quad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。これより、任意の $R \in (0, \pi)$ に対して、

$(-\pi <) \quad -R \leq x \leq R \ (< \pi) \quad$ において

$$
\begin{aligned}
|S_{An}(x) - x| &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx \tan \frac{x}{2} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \int_0^x \frac{\cos nt}{\cos^2 \frac{t}{2}} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{n} |\sin nx| + \frac{1}{n} |\cos nx| \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2n} \left| \int_0^x \frac{|\cos nt|}{\left| \cos^2 \dfrac{t}{2} \right|} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \tan \frac{R}{2} + \frac{1}{2n} \frac{R}{\cos^2 \dfrac{R}{2}} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

すなわち、S_{An} は $(-\pi, \pi)$ 上、f_A に広義一様収束します。

一方、$S_{An}(\pm\pi) = 0\ (n \in \mathbf{N})$ より、

$$\lim_{n\to\infty} S_{An}(\pm\pi) = 0 \neq \pm\pi$$

なので、S_{An} は $(-\pi, \pi)$ 上、各点収束はするものの、極限関数

$$\tilde{f}_A(x) = \begin{cases} f_A(x) & (x \neq m\pi) \\ 0 & (x = m\pi) \end{cases} \qquad (m : \text{奇数})$$

は f_A と完全には一致せず、また、この $\tilde{f}_A$ は不連続なので、連続関数列 S_{An} の $\tilde{f}_A$ への収束は一様収束ではありません。

f_B を $f_B(x) = f_A(\pi - x)$ で定義すると、f_B は

$$f_B(x) = \begin{cases} -\pi - x & (-\pi < x < 0) \\ \pi - x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数になります。f_B のフーリエ級数は、定義通りに計算する以外に、f_A のフーリエ級数から、次のように求めることもできます。

$$\begin{aligned} S_{Bn}(x) &= S_{An}(\pi - x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin k(\pi - x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} (-1)^{k+1} \sin kx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \sin kx \quad (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

これより、f_B のフーリエ係数は、

$$a_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), \quad b_k = \frac{2}{k} \quad (k \in \mathbf{N})$$

です。S_{Bn} は $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上、f_B に広義一様収束します。

f_C を $f_C(x) = f_A(x) + f_B(x)$ で定義すると、f_C は

$$f_C(x) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < x < 0) \\ \pi & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数になります。f_C のフーリエ級数も、定義通りに計算する以外に、f_A と f_B のフーリエ級数から、次のように求めることができます。

$$\begin{aligned} S_{Cn}(x) &= S_{An}(x) + S_{Bn}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2\{(-1)^{k+1} + 1\}}{k} \sin kx \\ &= \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k} \sin kx \quad (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

これより、f_C のフーリエ係数は、

$$a_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), \quad b_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k} & (k : \text{奇数}) \\ 0 & (k : \text{偶数}), \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N})$$

です。S_{Cn} は $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上、f_C に広義一様収束します。

f_D を $f_D(x) = f_C\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ で定義すると、f_D は

$$f_D(x) = \begin{cases} -\pi & \left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi\right) \\ \pi & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数になります。f_D のフーリエ級数も、定義通りに計算する以外に、f_C のフーリエ級数から、次のように求めることができます。

$$\begin{aligned} S_{Dn}(x) &= S_{Cn}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k} \sin k\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k} \cos kx \end{aligned}$$

これより、f_D のフーリエ係数は、

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k} & (k : \text{奇数}) \\ 0 & (k : \text{偶数}), \end{cases} \qquad b_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$$

です。S_{Dn} は $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上、f_D に広義一様収束します。

f_E を $f_E(x) = \dfrac{1}{\pi} f_D(x)$ で定義すると、(f_E は例 1-1 の f です。)

$$
\begin{aligned}
S_{En}(x) &= \frac{1}{\pi} S_{Dn}(x) \\
&= \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k\pi} \cos kx \quad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

より、f_E のフーリエ係数は、

$$
a_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & (k : \text{奇数}) \\ 0 & (k : \text{偶数}), \end{cases} \qquad b_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})
$$

です。S_{En} は $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上、f_E に広義一様収束します。

f_F を

$$f_F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{(m+1/2)\pi}^{x} f_C(t)dt \quad (m\pi \leq x \leq (m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

で定義すると、

$$f_F(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数になります。(f_F は例 1-2 の f です。) f_F のフーリエ級数も、定義通りに計算する以外に、f_C のフーリエ級数から、次のように求めることができます。

$$
\begin{aligned}
S_{Fn}(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{(m+1/2)\pi}^{x} S_{Cn}(t)dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{(m+1/2)\pi}^{x} \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k}\sin kt dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \int_{(m+1/2)\pi}^{x} \frac{4}{k}\sin kt dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k^2}[-\cos kt]_{(m+1/2)\pi}^{x} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{4}{k^2}\left\{-\cos kx + \cos k\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{n} \frac{-4}{k^2\pi}\cos kx \quad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

より、f_F のフーリエ係数は、

$$a_0 = \pi, \quad a_k = \begin{cases} \dfrac{-4}{k^2\pi} & (k : \text{奇数}) \\ 0 & (k : \text{偶数}), \end{cases} \quad b_k = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$$

です。S_{Fn} が $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上、f_F に広義一様収束することは、ここまでの事実と定理 1-2 (の証明) からわかりますが、実はこの場合は $[-\pi, \pi]$ 上で、一様収束することが、後日紹介する一般論で示せます。

f_G は

$$f_G(x) = x^2 \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

を周期 2π で $\mathbf{R}$ 全体に拡張した関数とします。(教科書の練習問題 1,2(1)、例題 2-1 の f です。)

f_G は偶関数なので、

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \ = \ 0 \quad (k \in \mathbf{N})$$

が成り立ち、f_G のフーリエ級数はフーリエ余弦級数になります。

今、

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \; = \; \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \; = \; \frac{2\pi^2}{3} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{-\sin kx}{k}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[2x\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\frac{\cos kx}{k^2}dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot 4\pi\frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= \frac{4(-1)^k}{k^2} \quad (k \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

より、L^2 近似を与える三角多項式は、

$$\begin{aligned} S_{Gn}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx \quad (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

です。

実は、この場合も、S_{Gn} が $[-\pi,\pi]$ 上で f_G に一様収束することが、一般論で示せるので、特に $x=\pi$ ととれば、

$$\begin{aligned}\pi^2 = f_G(\pi) &= \lim_{n\to\infty} S_{Gn}(\pi) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos k\pi \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\end{aligned}$$

より、

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

を得ます。

この等式の両辺に π をかければ、

$$\frac{2\pi^3}{3} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

で、これより、f_A の S_{An} による L^2 近似の誤差 ϵ_n が、$n \to \infty$ のとき 0 に収束する(すなわち S_{An} が f_A に L^2 収束する) ことがわかります。

この事実が、より一般の区分的に滑らかな関数(定義は後に与えます) について、一周期の内に有限個の不連続点があって、フーリエ級数が一様収束しない場合でも、L^2 収束はしていることの根拠を与えます。

前頁で示した等式は、S_F を用いても導くことができます。

実際、既に述べたように、S_{Fn} が $[-\pi,\pi]$ 上で f_F に一様収束することが、一般論で示せるので、特に $x=0$ ととれば、

$$\begin{aligned}0 = f_F(0) &= \lim_{n\to\infty} S_{Fn}(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{\infty} \frac{-4}{k^2\pi}\cos 0 \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \sum_{k=1;k:\text{奇数}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} - \sum_{k=1;k:\text{偶数}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2\pi}\end{aligned}$$

を得ます。

この等式の両辺に $\dfrac{4\pi^2}{3}$ をかければ、前頁の等式が得られます。