

応用数学・講義資料

第6回

(2024年11月6日(水)配信分)

収束条件

I は \mathbb{R} の閉区間とします。

関数 f が、 I の有限個の点を除き連続で、 I からそれらの点を除いてできる各開区間において連続かつ両端点で片側極限值をもつとき、 f は I 上区分的に連続であると言います。

さらに f がそれらの各開区間 (または、そこからさらに有限個の点を除いた所) で微分可能で、 f, f' が共に I 上区分的に連続のとき、 f は I 上区分的に滑らかであると言います。

注意：一般には「滑らか」は C^∞ 級を指すことが多いのですが、ここでは C^1 級の意味で用いています。

同様に、 $f, f', \dots, f^{(p)}$ が、いずれも I 上区分的に連続のとき、 f は I 上区分的に C^p 級であると言います。

I 上の任意の x に対し

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

とおきます。

($f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$ (左極限值)、 $f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$ (右極限值))

f が連続であるような x については $\tilde{f}(x) = f(x)$ が成り立ち、
 f の不連続点では、 \tilde{f} は f の左極限值と右極限值の中間の値 (グラフ上の中点) をとります。

定理 2-1 (リーマン・ルベークの定理)

f が $[a, b]$ 上区分的に滑らか (C^1 級) のとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx = 0$$

が成り立つ。

(証明)

f の不連続点を x_1, \dots, x_{M-1} とし、 $x_0 = a, x_M = b$ と表すことにします。

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \cos kx dx \\ &= \sum_{m=1}^M \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) \cos kx dx \\ &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[f(x) \frac{\sin kx}{k} \right]_{x_{m-1}}^{x_m} - \int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x) \frac{\sin kx}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ f(x_m - 0) \sin kx_m - f(x_{m-1} + 0) \sin kx_{m-1} \right. \\ & \quad \left. - \int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x) \sin kx dx \right\} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(x) \cos kx dx \right| \\
& \leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ |f(x_m - 0)| |\sin kx_m| + |f(x_{m-1} + 0)| |\sin kx_{m-1}| \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f'(x)| |\sin kx| dx \right\} \\
& \leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ |f(x_m - 0)| + |f(x_{m-1} + 0)| + \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f'(x)| dx \right\}
\end{aligned}$$

全く同様に

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \sin kx dx \\ &= \sum_{m=1}^M \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) \sin kx dx \\ &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[f(x) \frac{-\cos kx}{k} \right]_{x_{m-1}}^{x_m} - \int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x) \frac{-\cos kx}{k} dx \right\} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ -f(x_m - 0) \cos kx_m + f(x_{m-1} + 0) \cos kx_{m-1} \right. \\ & \quad \left. + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x) \cos kx dx \right\} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(x) \sin kx dx \right| \\
& \leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ |f(x_m - 0)| |\cos kx_m| + |f(x_{m-1} + 0)| |\cos kx_{m-1}| \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f'(x)| |\cos kx| dx \right\} \\
& \leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ |f(x_m - 0)| + |f(x_{m-1} + 0)| + \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f'(x)| dx \right\}
\end{aligned}$$

そこで

$$c_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (|f(x)| \leq c_1 \ (x \in [a, b]) \text{ を満たす最小の } c_1)$$

$$c_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad (|f'(x)| \leq c_2 \ (x \in [a, b]) \text{ を満たす最小の } c_2)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) \cos kx dx \right|, \quad \left| \int_a^b f(x) \sin kx dx \right| \\ & \leq \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \left\{ 2c_1 + \int_{x_{m-1}}^{x_m} c_2 dx \right\} \\ & = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^M \{ 2c_1 + c_2(x_m - x_{m-1}) \} \\ & = \frac{1}{k} \{ 2Mc_1 + (b - a)c_2 \} \end{aligned}$$

より、 $k \rightarrow \infty$ のとき、いずれも0に収束します。□

注意 2-1

f が $[a, b]$ 上区分的に連続のとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx = 0$$

が成り立つ。

(証明)

定理 2-1 では、区分的に滑らか (C^1 級) を仮定して、主張を証明していますが、ここでは注意 2-1 で言及されている区分的に連続のみ仮定した場合の証明の本質的な部分を紹介しておきます。

但し一般の場合の証明は、補足的な細かい調整が必要なので、 $[a, b] = [-\pi, \pi]$ で、区分的でなく連続の場合の証明について述べるにとどめます。

一般に f が閉区間で連続のとき、一様連続になるのですが、これも認めることにします。

ここで、**一様連続**であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、 x, y に依らない $\delta > 0$ で、

$$|x - y| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

が成り立つようなものが存在することを言います。

注意：一様連続と言う時には、各点での連続性を ϵ - δ 論法を用いて表す際の $\delta > 0$ がその点に依らず、区間全体で共通して取れると言う所で、通常の連続性より条件が強くなっています。

さて、 f は $[-\pi, \pi]$ で一様連続とし、任意の $\epsilon > 0$ に対し、上の条件を満たす $\delta > 0$ を一つとります。このとき

$$k > \frac{2\pi}{\delta}$$

を満たす任意の k に対し、

$$\frac{2\pi}{k} < \delta$$

が成り立つので、

$$|x - y| \leq \frac{2\pi}{k} \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

が成り立ちます。

今、 $[-\pi, \pi]$ を k 等分して出来る閉区間の内、任意の一つを $I = [\alpha, \beta]$ とし、さらに

$$m_1 = \min_{x \in I} f(x)$$

$$m_2 = \max_{x \in I} f(x)$$

とおけば

$$(6.2) \quad m_1 \leq f(x) \leq m_2 \quad (x \in I)$$

かつ $m_2 - m_1 < \epsilon$ が成り立ちます。

ここで、

$$\cos k\alpha = \cos k\beta = (-1)^k$$

$$\sin k\alpha = \sin k\beta = 0$$

が成り立つことに注意し、 I の内、

I_{c+} で $\cos kx \geq 0$ となる部分集合を、

I_{c-} で $\cos kx \leq 0$ となる部分集合を、

I_{s+} で $\sin kx \geq 0$ となる部分集合を、

I_{s-} で $\sin kx \leq 0$ となる部分集合を、

それぞれ表します。

$\cos kx, \sin kx$ は、いずれも周期 $\frac{2\pi}{k}$ を持つので、これらの各部分集合 (具体的には閉区間または 2 個の閉区間の和集合) では

$$\begin{aligned}\int_{I_{c+}} \cos kx dx &= \int_{-\pi/2k}^{\pi/2k} \cos kx dx = \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi/2k}^{\pi/2k} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})}{k} = \frac{2}{k}\end{aligned}$$

$$\int_{I_{c-}} \cos kx dx = -\frac{2}{k}$$

$$\begin{aligned}\int_{I_{s+}} \sin kx dx &= \int_0^{\pi/k} \sin kx dx = \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi/k} \\ &= \frac{-\cos \pi + \cos 0}{k} = \frac{2}{k}\end{aligned}$$

$$\int_{I_{s-}} \sin kx dx = -\frac{2}{k}$$

が成り立ちます。

一方、ここで (6.2) より、

$$m_1 \cos kx \leq f(x) \cos kx \leq m_2 \cos kx \quad (x \in I_{c+})$$

$$m_1 \cos kx \geq f(x) \cos kx \geq m_2 \cos kx \quad (x \in I_{c-})$$

$$m_1 \sin kx \leq f(x) \sin kx \leq m_2 \sin kx \quad (x \in I_{s+})$$

$$m_1 \sin kx \geq f(x) \sin kx \geq m_2 \sin kx \quad (x \in I_{s-})$$

が成り立ちます。よって、

$$\begin{aligned} \frac{2}{k}m_1 &\leq \int_{I_{c+}} f(x) \cos kx dx \leq \frac{2}{k}m_2 \\ -\frac{2}{k}m_1 &\geq \int_{I_{c-}} f(x) \cos kx dx \geq -\frac{2}{k}m_2 \\ \frac{2}{k}m_1 &\leq \int_{I_{s+}} f(x) \sin kx dx \leq \frac{2}{k}m_2 \\ -\frac{2}{k}m_1 &\geq \int_{I_{s-}} f(x) \sin kx dx \geq -\frac{2}{k}m_2 \end{aligned}$$

より

$$\frac{2}{k}(m_1 - m_2) \leq \int_I f(x) \cos kx dx \leq \frac{2}{k}(m_2 - m_1)$$
$$\frac{2}{k}(m_1 - m_2) \leq \int_I f(x) \sin kx dx \leq \frac{2}{k}(m_2 - m_1)$$

従って

$$\left| \int_I f(x) \cos kx dx \right| \leq \frac{2}{k}(m_2 - m_1) < \frac{2}{k}\epsilon$$
$$\left| \int_I f(x) \sin kx dx \right| \leq \frac{2}{k}(m_2 - m_1) < \frac{2}{k}\epsilon$$

が、全ての I で成り立ちます。

ここで、 k 個の I について、これらの積分の評価式を足し合わせれば

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right| < 2\epsilon$$
$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right| < 2\epsilon$$

を得ます。 δ を適宜取り替えば、 ϵ はいくらでも小さくできるので、それぞれの極限值が 0 であることがわかります。

一般の場合は、端点や不連続点の前後の、周期からずれた微小な区間での積分値が、 $k \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することを付け加えればよいのですが、手間がかかるので省略します。□

以下、前同様に f のフーリエ係数を a_k, b_k で表すと、定理2-1と注意2-1より、次が成り立ちます。

定理2-2

f が $[-\pi, \pi]$ 上区分的に連続のとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

が成り立つ。

特に f が $[-\pi, \pi]$ 上区分的に滑らか (C^1 級) のとき、

$$|a_k| < \frac{c}{k}, \quad |b_k| < \frac{c}{k}$$

を満たす正定数 c が存在する。

(証明)

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$\pi b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

より、 $a = -\pi$, $b = \pi$ において、注意2-1を適用すれば、前半の主張が得られ、また、定理2-1 (の証明) より、

$$|a_k| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{2Mc_1 + 4\pi c_2}{\pi}$$

$$|b_k| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{2Mc_1 + 4\pi c_2}{\pi}$$

が成り立つので、これから後半の主張が得られます。□