応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第 7 回}}$

(2024年11月13日(水)配信分)

収束条件(続き)

前回の考察を踏まえて、フーリエ級数の収束について次が成り立ちます。

定理 2-3

f が $[-\pi, \pi]$ 上区分的に滑らかのとき、f のフーリエ級数(の部分和)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

は $\tilde{f}$ に $[-\pi, \pi]$ 上(各点) 収束する。

さらに、f の不連続点を除いた $[-\pi, \pi]$ の部分集合上では、S_n は f に広義一様収束する。

(証明)

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(y)dy \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky dy \cos kx \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky dy \sin kx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) \right\} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-y) \right\} f(y)dy
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

ここで

$$D_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ky$$

(これをディリクレ核と言います)　とおけば、上の等式は

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} D_n * f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy$$

と表せます。($*$ は合成積(畳み込み) と言います。詳細は次回。)

ここで、

$$\begin{aligned}2\sin\frac{y}{2}D_n(y) &= \sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{y}{2}\cos ky \\ &= \sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(ky+\frac{y}{2}\right) - \sin\left(ky-\frac{y}{2}\right)\right\} \\ &= \sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)y - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right\} \\ &= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y\end{aligned}$$

(教科書では複素数の指数関数を用いて証明しています) より、任意の $y \neq 2m\pi\ (m \in \mathbf{Z})$ (すなわち $\sin\frac{y}{2} \neq 0$ を満たす y) に対し、

$$D_n(y) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}$$

が成り立ちます。

今、f, D_n は共に周期 2π なので(または、そのように $\mathbf{R}$ 全体に拡張できるので)　任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} D_n(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x} D_n(x-y)f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{x}^{x+\pi} D_n(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{0} D_n(x-(x-2t))f(x-2t)d(x-2t) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} D_n(x-(x+2t))f(x+2t)d(x+2t) \\
&\qquad\qquad\quad (\leftarrow y = x \mp 2t \text{ と置換}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} D_n(2t)f(x-2t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} D_n(-2t)f(x+2t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} (f(x-2t)+f(x+2t))D_n(2t)dt
\end{aligned}
$$

一方、定義より

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi D_n(y)dy &= \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ky\right\} dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin ky\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

なので($y = 2t$ と置換すると)

$$
\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} D_n(2t)d(2t) = \int_0^{\pi/2} 2D_n(2t)dt
$$

より

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \tilde{f}(x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2D_n(2t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\tilde{f}(x)D_n(2t)dt
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

　以上より

$$S_n(x) - \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(f(x-2t) + f(x+2t) - 2\tilde{f}(x))D_n(2t)dt$$

を得ます。

　ここで

$$2\tilde{f}(x) = f(x-0) + f(x+0)$$

より

$$\varphi(t,x) = f(x-2t) + f(x+2t) - 2\tilde{f}(x)$$

とおけば、x を固定する毎に $\varphi(t,x)$ は $t=0$ の近くで、まず $t \neq 0$ で連続で、さらに

$$\varphi(t,x) = f(x-2t) - f(x-0) + f(x+2t) - f(x+0)$$

より $\varphi(\pm 0, x) = 0$ が成り立ち、$t=0$ でも連続です。

今、x が f または f' の不連続点であるなしに係わらず、左右の最も近い不連続点をa, b で表すことにします。

$$a < x - 2t, \quad x + 2t < b$$

すなわち

$$0 < t < m_x = \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\}$$

をみたす(つまり $t = 0$ に十分近い) t に対して C^1 級なので、平均値の定理より

$$\frac{\varphi(t,x)}{t} = \frac{\varphi(t,x) - \varphi(0,x)}{t-0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta t, x)$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が、各 t 毎に、少なくとも一つは存在します。

ここで f' は区分的に連続なので

$$c_0 = \sup_{y \in (a,b)} |f'(y)|$$

が存在して

$$\begin{aligned} |\varphi_t(t,x)| &= |-2f'(x-2t) + 2f'(x+2t)| \\ &\le 2(|f'(x-2t)| + |f'(x+2t)|) \\ &\le 4c_0 \end{aligned}$$

より、$C = 4c_0$ とおくと

$$|\varphi(t,x)| \le Ct$$

が成り立ちます。

前々頁の a, b は、$[-\pi, \pi]$ ではなく $\mathbf{R}$ において、左右の最も近い f の不連続点をとります。

ここでは、より近い所に f' の不連続点が存在しないことを仮定して前頁の不等式を証明していますが、f' の不連続点が存在しても、そこで f 自身が連続である限り、同じ不等式が導かれます。

実際、各 t に対して、$x-2s$ または $x+2s$ が f' の不連続点であるような $s \in (0,t)$ を $t_1 < \cdots < t_{L-1}$ とし、$t_0 = 0$, $t_L = t$ と表すと、各小区間 $[t_{\ell-1}, t_\ell]$ $(\ell = 1, \ldots, L)$ において平均値の定理が適用出来て、

$$
\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \sum_{\ell=1}^{L} (\varphi(t_\ell, x) - \varphi(t_{\ell-1}, x)) + \varphi(0,x) \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{\ell-1} + \theta_\ell (t_\ell - t_{\ell-1}), x)(t_\ell - t_{\ell-1}) + 0
\end{aligned}
$$

$(\theta_\ell \in (0,1)(\ell = 1, \ldots, L))$ より

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t,x)| &\leq \sum_{\ell=1}^{L} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{\ell-1} + \theta_\ell (t_\ell - t_{\ell-1}), x) \right| (t_\ell - t_{\ell-1}) \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{L} 4c_0 (t_\ell - t_{\ell-1}) \\
&= C(t_L - t_0) \ = \ Ct
\end{aligned}
$$

を得ます。

なお、f が $\mathbf{R}$ 上連続のとき、x に依らず $m_x = \infty$ です。

そこで、$0 < \delta \le m_x$ を満たす δ に対し、

$$\begin{aligned} S_n(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(t,x)D_n(2t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \varphi(t,x)D_n(2t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} \varphi(t,x)D_n(2t)dt \end{aligned}$$

と分けて考えることにします。

ここで第１項は

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \varphi(t,x)D_n(2t)dt\right| &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^\delta |\varphi(t,x)||D_n(2t)|dt \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^\delta Ct\frac{|\sin(2n+1)t|}{|2\sin t|}dt \\ &\leq \int_0^\delta C|\sin t|\frac{1}{|2\sin t|}dt \\ &= \int_0^\delta \frac{C}{2}\,dt \ = \ \frac{C\delta}{2}\end{aligned}$$

より、十分小さい任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{C}, m_x\right\}$ ととれば

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \varphi(t,x)D_n(2t)dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立ちます。

一方、この δ に対し、第２項は

$$\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\varphi(t,x)D_n(2t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{\varphi(t,x)}{\sin t}\sin(2n+1)tdt$$

と書き換えられるので、ここで

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sup_{t\in[\delta,\pi/2]}\left|\frac{\varphi(t,x)}{\sin t}\right| \\
c_2 &= \sup_{t\in[\delta,\pi/2]}\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi(t,x)}{\sin t}\right| \\
c &= \frac{2Mc_1+(\pi-2\delta)c_2}{\pi}
\end{aligned}$$

(M は $\varphi(t,x)$ の不連続点の個数 $+1$)　とおけば、定理2-1の証明同様に

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\varphi(t,x)D_n(2t)dt\right| \leq \frac{c}{2n+1}$$

より、

$$N > \frac{1}{2}\left(\frac{2c}{\epsilon}-1\right)$$

を満たす $N \in \mathbf{N}$ を一つ選べば、全ての $n \geq N$ に対して、

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\varphi(t,x)D_n(2t)dt\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立ちます。

よって、第１項と第２項の評価を併せれば、

$$|S_n(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

も成り立ちます。すなわち

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(x) - \tilde{f}(x)| = 0$$

が、各 $x \in [-\pi, \pi]$ について成り立ちます。

(S_n は $\tilde{f}$ に $[-\pi, \pi]$ 上各点収束します。収束はするが、点によっては収束の速さが限りなく遅いことがあるかもしれないと言う意味です。)

ここで f が不連続点を持てば、固定した x が不連続点に近ければ近いほど、m_x も小さくなり、δ も小さくとらなければなりませんが、f が連続ならば、δ として x に依らない値がとれるので、

(その結果 N も x に依らずにとれるので、)

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n - f||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立ちます。

(すなわち S_n は f に $[-\pi, \pi]$ 上一様収束します。) $\square$

項別微分については、次が成り立ちます。

定理2-4

f が $[-\pi, \pi]$ 上連続で、両端での値が一致し(つまり $f(-\pi) = f(\pi)$ が成り立ち)、かつ区分的に滑らかのとき、f' のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\}$$

で与えられる。

(証明)

f' の不連続点を $x_1 < \cdots < x_{M-1}$ とし、$x_0 = -\pi$, $x_M = \pi$ と表すことにします。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx dx \;&=\; \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x)\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\left\{[f(x)\cos kx]_{x_{m-1}}^{x_m} - \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)(\cos kx)' dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\{f(x_m)\cos kx_m - f(x_{m-1})\cos kx_{m-1}\} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)(-k\sin kx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\{f(x_M)\cos kx_M - f(x_0)\cos kx_0\} + \frac{k}{\pi}\int_{x_0}^{x_M} f(x)\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\{f(\pi)\cos k\pi - f(-\pi)\cos(-k\pi)\} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}(-1)^k(f(\pi) - f(-\pi)) + kb_k \;=\; kb_k \quad (\because\; f(-\pi) = f(\pi)\;)
\end{aligned}$$

また、ほぼ同様に

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx &= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{x_{m-1}}^{x_m} f'(x)\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\left\{[f(x)\sin kx]_{x_{m-1}}^{x_m} - \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)(\sin kx)' dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\{f(x_m)\sin kx_m - f(x_{m-1})\sin kx_{m-1}\} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)k\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}(f(x_M)\sin kx_M - f(x_0)\sin kx_0) - \frac{k}{\pi}\int_{x_0}^{x_M} f(x)\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\{f(\pi)\sin k\pi - f(-\pi)\sin(-k\pi)\} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\{f(\pi)\cdot 0 - f(-\pi)\cdot 0\} - ka_k = -ka_k
\end{aligned}$$

が成り立ちます。□

ただし、これらのフーリエ係数によって与えられるフーリエ級数が、f' と一致するかどうかは別問題です。この級数(の部分和)が一様収束するならば、f' に一致します。

定理2-4 を繰り返し適用することで、定理2-2 が次のように一般化されます。

注意2-2, 演習問題2,3(1)

f が $[-\pi, \pi]$ 上 C^{p-1} 級で、

$$f^{(\ell)}(-\pi) = f^{(\ell)}(\pi) \quad (\ell = 0, \ldots, p-1)$$

を満たし、かつ区分的に C^p 級のとき、

$$|a_k| < \frac{c}{k^p}, \quad |b_k| < \frac{c}{k^p}$$

を満たす正定数 c が存在する。

(証明)

仮定より、$f,\ f',\ \cdots,\ f^{(p-1)}$ が $[-\pi,\pi]$ 上連続で、両端での値が一致し、かつ(区分的でなく) 滑らかなので、定理2-4が p 回繰り返し適用できます。

ここで、$f^{(p)}$ のフーリエ係数を $a_{p,k},\ b_{p,k}$ で表すと、

$$(a_{p,k}, b_{p,k}) = \begin{cases} (-1)^{p/2}k^p(a_k, b_k) & (p : \text{偶数}) \\ (-1)^{(p-1)/2}k^p(b_k, -a_k) & (p : \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立ちます。

一方、$f^{(p)}$ は $[-\pi,\pi]$ 上区分的に連続なので、定理2-2より $a_{p,k}$, $b_{p,k}$ は有界で、

$$|a_{p,k}| < c, \quad |b_{p,k}| < c$$

を満たす正定数 c が存在します。□

さらに項別積分について、次が成り立ちます。

定理2-5

f が $[-\pi, \pi]$ 上区分的に滑らかのとき、$f - \dfrac{a_0}{2}$ の不定積分(原始関数)

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

のフーリエ級数は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{k} \sin kx - \frac{b_k}{k} \cos kx \right\}$$

で与えられる。特に、この級数(の部分和)　は F に一様収束する。

(証明)

F は $[-\pi, \pi]$ 上連続で、

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$
$$= \pi a_0 - 2\pi \frac{a_0}{2} \ = \ 0$$

より、両端での値も一致し、さらに $F' = f - \dfrac{a_0}{2}$ は $[-\pi, \pi]$ 上区分的に連続。そのフーリエ係数は、定数項以外は f の場合と同じなので、定理2-4における f として F をとれば、主張の第２項が得られます。

さらに定理2-3より、F のフーリエ級数は F に一様収束するので、フーリエ級数の定数項は

$$
\begin{aligned}
F(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{k} \sin k \cdot 0 - \frac{b_k}{k} \cos k \cdot 0 \right\} \\
&= 0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 0 - \frac{b_k}{k} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}
\end{aligned}
$$

□

$\boxed{L^2 \text{ 収束}}$

一般に、関数列 S_n が、(有限) 閉区間 $I = [a, b]$ で、関数 f が一様収束するなら、L^2 収束します。

実際

$$\begin{aligned}
||S_n - f||_2^2 &= \int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2 dx \\
&\leq \int_a^b \left(\sup_{y \in [a,b]} |S_n(y) - f(y)| \right)^2 dx \\
&= \left(\sup_{y \in [a,b]} |S_n(y) - f(y)| \right)^2 \int_a^b dx \\
&= ||S_n - f||_\infty^2 (b - a)
\end{aligned}$$

より、

$$||S_n - f||_2 \leq \sqrt{b-a}\,||S_n - f||_\infty$$

が成り立つので、$n \to \infty$ のとき、右辺が 0 に収束すれば、左辺も 0 に収束します。

定理2-3より、f が $[-\pi, \pi]$ で連続かつ区分的に滑らかならば、$n \to \infty$ のとき S_n は f に一様収束するので、同時に L^2 収束もします。

注意：有限な閉区間でなければ、上の証明は成り立ちません。

既に見たように S_n が f に L^2 収束するとき、パーセヴァルの等式

$$||f||_2^2 = \pi \left\{ \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ({a_k}^2 + {b_k}^2) \right\}$$

が成り立ちます。

$[-\pi, \pi]$ 上区分的に滑らかな関数 f については、S_n は f に L^2 収束するので、パーセヴァルの等式が成り立ちます。よって、もし

$$\begin{aligned} (f, \phi_k)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= 0 \\ (f, \psi_k)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つならば、全てのフーリエ係数 a_k, b_k が 0 となるため、

$$||f||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$$

より $f(x) \equiv 0$ でなければならないことになります。

　このことを、$[-\pi, \pi]$ 上区分的に滑らかな関数全体がなす無限次元のベクトル空間において、$\phi_k(x) = \cos kx$, $\psi_k(x) = \sin kx$ は、L^2 内積について完全直交関数系である(直交関数系として完全である)と言います。