応用数学・講義資料

$\boxed{\text{第８回}}$

(2024年11月20日(水)配信分)

$\boxed{\text{複素数を用いた表示}}$

一般に、正弦と余弦の一次結合

$$a\cos x + b\sin x$$

が与えられたとき,

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす θ を一つとれば、

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) \end{aligned}$$

より、同じ周期の正弦と余弦の重ね合わせは、同じ値をとる所を横にずらす意味を持ちます。

各 $k \in \mathbf{N}$ に対して、同様に

$$\cos\theta_k = \frac{a_k}{\sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}}, \quad \sin\theta_k = \frac{b_k}{\sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}}$$

を満たす θ_k を一つずつとれば、フーリエ級数(の部分和) は

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2} \cos(kx - \theta_k) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2} \cos\left\{k\left(x - \frac{\theta_k}{k}\right)\right\} \end{aligned}$$

と表せます。各周期 $2k\pi$ 毎に二つの項が必要なのは、このためです。

従って、場合によっては、複素数の指数関数を用いて表した方が、より効率的に処理できることもあります。

テイラー展開のところで紹介しましたように、三角関数は複素数の指数関数を用いて

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

と表せます。従って、

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}\right\} \end{aligned}$$

なので、

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} & (k = 0) \\ \dfrac{a_k - ib_k}{2} & (k > 0) \\ \dfrac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & (k < 0) \quad \left(\Longleftrightarrow c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2} \quad (k > 0) \right) \end{cases}$$

とおけば、

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{8.1}$$

と表せます。

ちなみに、複素数値関数の L^2 内積は、複素ベクトルのエルミート内積同様、後ろの共役をとり、

$$(S,T)_2 = \int_{-\pi}^{\pi} S(x)\overline{T(x)}dx$$

で定めます。

ここで $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ $(k \in \mathbf{Z})$ とおけば $\varphi_0(x) = e^{i0x} = 1$ より

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{i0x}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}(f,\varphi_0)_2 \end{aligned}$$

$k > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{(\cos kx + i\sin kx)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}(f, \varphi_k)_2
\end{aligned}
$$

$k < 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-k)x dx + \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-k)x dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{(\cos kx + i\sin kx)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}(f, \varphi_k)_2
\end{aligned}
$$

より、(8.1) 右辺の係数が、全ての $k \in \mathbf{Z}$ (ここでは $k = -n, \ldots, n$) について、

$$c_k = \frac{1}{2\pi}(f, \varphi_k)_2$$

で与えられていることがわかります。(定理1-8)

今、任意の互いに異なる $k, \ell \in \mathbf{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\varphi_k, \varphi_\ell)_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{i\ell x}}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x}dx \\
&= \left[\frac{1}{i(k-\ell)}e^{i(k-\ell)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{e^{i(k-\ell)\pi} - e^{-i(k-\ell)\pi}}{i(k-\ell)} \\
&= \frac{(-1)^{k-\ell} - (-1)^{k-\ell}}{i(k-\ell)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

また任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}
||\varphi_k||_2^2 &= (\varphi_k, \varphi_k)_2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{ikx}}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= [x]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi - (-\pi) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

より、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

が正規直交関数系をなしています。(注意1-4)

合成積のフーリエ級数

三角関数よりも指数関数を用いた方が、わかりやすくなるものの例として、合成積のフーリエ係数があります。

周期 2π の関数 f, g に対し、

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

で定義される関数を、f と g の合成積(畳み込み) と言います。
(練習問題2,4,(定義4-3))

合成積は

$$\begin{aligned}
&\text{交換律(可換則)} &:\ & f * g = g * f \\
&\text{結合律(結合則)} &:\ & (f * g) * h = f * (g * h) \\
&\text{分配律(分配則)} &:\ & f * (g + h) = f * g + f * h
\end{aligned}$$

を満たします。

(交換律の証明)

$$
\begin{aligned}
g * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) f(y) dy \\
&= \int_{x+\pi}^{x-\pi} g(u) f(x-u)(-du) \quad (\leftarrow u = x-y \text{ と置換}) \\
&= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) g(u) du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) g(u) du \quad (\because \text{ 被積分関数は周期 } 2\pi \text{ より}) \\
&= f * g(x)
\end{aligned}
$$

□

(結合律の証明)

$$
\begin{aligned}
(f*g)*h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f*g(x-y)h(y)dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} f((x-y)-z)g(z)dz\right\} h(y)dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} f((x-z)-y)h(y)dy\right\} g(z)dz \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f*h(x-z)g(z)dz \\
&= (f*h)*g(x)
\end{aligned}
$$

と交換律より

$$
\begin{aligned}
(f*g)*h(x) &= (g*f)*h(x) \\
&= (g*h)*f(x) \ = \ f*(g*h)(x)
\end{aligned}
$$

□

今、 f, g, $f*g$ のフーリエ係数を、それぞれa_k, b_k, a'_k, b'_k, a''_k, b''_k で表すことにすると

$$
\begin{aligned}
a''_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f*g(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right\}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)dx\right\}g(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)du\right\}g(y)dy \quad \text{(← $u=x-y$ と変数変換)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du\right\}g(y)dy \quad \text{(∵ f は周期 2π より)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi a_0 g(y)dy \\
&= a_0\int_{-\pi}^{\pi} g(y)dy \\
&= \pi a_0 a'_0
\end{aligned}
$$

任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
a_k'' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f * g(x)\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right\}\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cos kx dx\right\}g(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\cos k(u+y)du\right\}g(y)dy
\end{aligned}
$$

(← $u = x - y$ と変数変換)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)(\cos ku\cos ky - \sin ku\sin ky)du\right\}g(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\cos ku du\right\}g(y)\cos ky dy \\
&\qquad -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\sin ku du\right\}g(y)\sin ky dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du\right\} g(y)\cos ky\,dy \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\right\} g(y)\sin ky\,dy
\end{aligned}
$$

(∵ 各被積分関数は周期 2π より)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi a_k g(y)\cos ky\,dy - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi b_k g(y)\sin ky\,dy \\
&= a_k\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ky\,dy - b_k\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ky\,dy \\
&= \pi a_k a_k' - \pi b_k b_k' \\
&= \pi(a_k a_k' - b_k b_k')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k'' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f * g(x)\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right\}\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\sin kx dx\right\}g(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\sin k(u+y)du\right\}g(y)dy
\end{aligned}
$$

(← $u = x - y$ と変数変換)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)(\sin ku\cos ky + \cos ku\sin ky)du\right\}g(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\sin ku du\right\}g(y)\cos ky dy \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)\cos ku du\right\}g(y)\sin ky dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin kudu\right\} g(y)\cos kydy \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos kudu\right\} g(y)\sin kydy
\end{aligned}
$$

(∵ 各被積分関数は周期 2π より)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi b_k g(y)\cos kydy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi a_k g(y)\sin kydy \\
&= b_k\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos kydy + a_k\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin kydy \\
&= \pi b_k a'_k + \pi a_k b'_k \\
&= \pi(b_k a'_k + a_k b'_k)
\end{aligned}
$$

以上まとめると

$$
\begin{aligned}
a_0'' &= \pi a_0 a_0' \\
a_k'' &= \pi(a_k a_k' - b_k b_k') \quad (k \in \mathbf{N}) \\
b_k'' &= \pi(b_k a_k' + a_k b_k') \quad (k \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

ところでここで、f, g, $f * g$ の複素フーリエ係数を、それぞれ c_k, c_k', c_k'' で表すことにすると

$$
\begin{aligned}
&c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_0' = \frac{a_0'}{2}, \quad c_0'' = \frac{a_0''}{2} \\
&c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k' = \frac{a_k' - ib_k'}{2}, \quad c_k'' = \frac{a_k'' - ib_k''}{2} \quad (k \in \mathbf{N}) \\
&c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, \quad c_k' = \frac{a_{-k}' + ib_{-k}'}{2}, \quad c_k'' = \frac{a_{-k}'' + ib_{-k}''}{2} \quad (k \in -\mathbf{N})
\end{aligned}
$$

です。($-\mathbf{N}$ は負の整数全体)

一方ここで、

$$c_0'' = \frac{a_0''}{2} = \frac{\pi a_0 a_0'}{2} = \frac{\pi \cdot 2c_0 \cdot 2c_0'}{2} = 2\pi c_0 c_0'$$

任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し

$$\begin{aligned} c_k'' &= \frac{a_k'' - ib_k''}{2} \\ &= \frac{\pi(a_k a_k' - b_k b_k') - i\pi(b_k a_k' + a_k b_k')}{2} \\ &= \frac{\pi(a_k - ib_k)(a_k' - ib_k')}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2c_k \cdot 2c_k'}{2} \\ &= 2\pi c_k c_k' \end{aligned}$$

任意の $k \in -\mathbf{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
c''_k &= \frac{a''_{-k} + ib''_{-k}}{2} \\
&= \frac{\pi(a_{-k}a'_{-k} - b_{-k}b'_{-k}) + i\pi(b_{-k}a'_{-k} + a_{-k}b'_{-k})}{2} \\
&= \frac{\pi(a_{-k} + ib_{-k})(a'_{-k} + ib'_{-k})}{2} \\
&= \frac{\pi \cdot 2c_k \cdot 2c'_k}{2} \\
&= 2\pi c_k c'_k
\end{aligned}
$$

も成り立ち、合成積の複素フーリエ係数が、元の関数の複素フーリエ係数の積の 2π 倍で与えられることがわかります。

(ここで、練習問題 2, 4(1) の主張と係数が異なるのは、正規直交関数系を用いていないためです。)

周期の取り換え

周期が 2π でなくて $2L$ の場合には

$$\cos\frac{k\pi}{L}x, \quad \sin\frac{k\pi}{L}x$$

の重ね合わせ

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{k\pi}{L}x+b_k\sin\frac{k\pi}{L}x\right\}$$

で考えます。フーリエ係数は

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi}{L}xdx, \quad b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi}{L}xdx$$

で与えられます。(定理2-7)

この場合

$$\int_{-L}^{L} dx = [x]_{-L}^{L} \ = \ L - (-L) \ = \ 2L$$

で、また任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{L} x\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{L}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi}{L} x\right]_{-L}^{L} \\
&= \frac{1}{2} \{(L + 0) - (-L + 0)\} \ = \ L \\
\int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{L} x\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi}{L} x\right]_{-L}^{L} \\
&= \frac{1}{2} \{(L - 0) - (-L - 0)\} \ = \ L
\end{aligned}$$

より、正規直交関数系は

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{k\pi}{L}x, \quad \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{k\pi}{L}x \qquad (k \in \mathbf{N})$$

です。