応用数学（水１）・中間試験問題 (解答例)

学籍番号　　　　　　　　　　　氏　名

（時間内に出来る）問題全てに解答して下さい。解答の作成にあたっては、途中の計算を省略しないで書くようにして下さい。

1　関数 f は、$(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x) = x$ を周期 2π で拡張した関数、すなわち

$$f(x) \;=\; x - 2m\pi \qquad ((2m-1)\pi < x \le (2m+1)\pi; m \in \mathbf{Z})$$

とする。f は (不連続点を除き) 奇関数なので、そのフーリエ余弦係数は全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1)　$k \in \mathbf{N}$ とする。関数 $x \sin kx$ の原始関数は

$$\boxed{\text{ア}}\, x\cos kx + \boxed{\text{イ}}\, \sin kx + \text{定数}$$

の形で表せる。$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{イ}}$ に当てはまる係数を求めよ。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})' &= \boxed{\text{ア}}(-kx\sin kx + \cos kx) + \boxed{\text{イ}}\, k\cos kx \\
&= -k\,\boxed{\text{ア}}\, x\sin kx + (\boxed{\text{ア}} + k\,\boxed{\text{イ}})\cos kx \\
&= x\sin kx
\end{aligned}$$

より

$$-k\,\boxed{\text{ア}} = 1, \qquad \boxed{\text{ア}} + k\,\boxed{\text{イ}} = 0$$

これを解いて

$$\boxed{\text{ア}} = -\frac{1}{k}, \qquad \boxed{\text{イ}} = \frac{1}{k^2}$$

(2)　f のフーリエ正弦係数 b_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)}{k}\pi\cos k\pi \\ &= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

(3)　$\ell \in \mathbf{N}$ とする。$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる値を求めよ。

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \boxed{\text{ウ}} & (k = 2\ell - 1) \\ \boxed{\text{エ}} & (k = 2\ell) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{ウ}} = (-1)^{\ell-1}, \qquad \boxed{\text{エ}} = 0$$

(4)　f のフーリエ正弦級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ が (不連続点を除き) $f(x)$ に収束することは認め、$x = \frac{\pi}{2}$ における値に着目することにより、円周率 π を無限級数で表す公式を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{2} = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{2\ell-1}\sin\frac{(2\ell-1)\pi}{2} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2\ell-1-1}}{2\ell-1}(-1)^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{\ell-1}}{2\ell-1} \end{aligned}$$

より

$$\pi = 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell-1}}{2\ell-1}$$

2 関数 f は問１の f とする。関数 g, h をそれぞれ、

$$g(x) \;=\; f(x)^3, \qquad h(x) \;=\; f(x)^3 - \pi^2 f(x)$$

で定義する。g は (不連続点を除き) 奇関数、h は (連続な) 奇関数なので、それらのフーリエ余弦係数はいずれも全て 0 である。次の各問に答えよ。

(1) $k \in \mathbf{N}$ とする。関数 $x^3 \sin kx$ の原始関数は

$$\boxed{\text{オ}}\, x^3 \cos kx + \boxed{\text{カ}}\, x^2 \sin kx + \boxed{\text{キ}}\, x \cos kx + \boxed{\text{ク}}\, \sin kx + \text{定数}$$

の形で表せる。$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる係数を求めよ。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})' &= \boxed{\text{オ}}(-kx^3 \sin kx + 3x^2 \cos kx) + \boxed{\text{カ}}(kx^2 \cos kx + 2x \sin kx) \\
&\qquad + \boxed{\text{キ}}(-kx \sin kx + \cos kx) + \boxed{\text{ク}}\, k \cos kx \\
&= -k\,\boxed{\text{オ}}\, x^3 \sin kx + (3\,\boxed{\text{オ}} + k\,\boxed{\text{カ}})x^2 \cos kx \\
&\qquad + (2\,\boxed{\text{カ}} - k\,\boxed{\text{キ}})x \sin kx + (\boxed{\text{キ}} + k\,\boxed{\text{ク}}) \cos kx \\
&= x^3 \sin kx
\end{aligned}$$

より

$$-k\,\boxed{\text{オ}} = 1, \qquad 3\,\boxed{\text{オ}} + k\,\boxed{\text{カ}} = 0, \qquad 2\,\boxed{\text{カ}} - k\,\boxed{\text{キ}} = 0, \qquad \boxed{\text{キ}} + k\,\boxed{\text{ク}} = 0$$

これを解いて

$$\boxed{\text{オ}} = -\frac{1}{k}, \qquad \boxed{\text{カ}} = \frac{3}{k^2}, \qquad \boxed{\text{キ}} = \frac{6}{k^3}, \qquad \boxed{\text{ク}} = -\frac{6}{k^4}$$

(2) g のフーリエ正弦係数 b'_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$
\begin{aligned}
b'_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin kx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin kx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x^3\cos kx + \frac{3}{k^2}x^2\sin kx + \frac{6}{k^3}x\cos kx - \frac{6}{k^4}\sin kx\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{k}\pi^3\cos k\pi + \frac{6}{k^3}\pi\cos k\pi\right\} \\
&= \frac{2\pi^2(-1)^{k-1}}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3}
\end{aligned}
$$

(3) h のフーリエ正弦係数 β_k $(k \in \mathbf{N})$ を全て求めよ。

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= b'_k - \pi^2 b_k \\
&= \frac{2\pi^2(-1)^{k-1}}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3} - \pi^2\frac{2(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \frac{12(-1)^k}{k^3}
\end{aligned}
$$

(4) h のフーリエ正弦級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin kx$ が $h(x)$ に収束することは認め、$x = \frac{\pi}{2}$ における値に着目することにより、π^3 を無限級数で表す公式を求めよ。

$$
\begin{aligned}
-\frac{3\pi^3}{8} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \pi^2\frac{\pi}{2} = h(\frac{\pi}{2}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\frac{k\pi}{2} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\beta_{2\ell-1}\sin\frac{(2\ell-1)\pi}{2} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{2\ell-1}}{(2\ell-1)^3}(-1)^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{\ell}}{(2\ell-1)^3}
\end{aligned}
$$

より

$$
\pi^3 = 32\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\ell-1)^3}
$$