線形代数１・演習問題—No.1—

行列の演算

１　一般に n 次正方行列 A は、対称行列 $B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ と交代行列 $C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ の和に分解される。（つまり $A=B+C$ と和の形に書ける。）次の行列を対称行列と交代行列の和に分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

２　2 次正方行列 A, B は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。${}^tABA = B$ が成り立つような A について、$a \neq 0$ のとき、a, b, c, d が満たす条件を求めよ。(実は $a \neq 0$ は自動的に成り立つ。)

３　3 次正方行列 A を行ベクトルに分割したものを

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

とする。また k は実数とし、3 次の正方行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。行列の積 BA の各行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ。

線形代数1・演習問題—No.2—

行列の演算 (続き)

4　次の行列の k 乗を $k=4$ まで計算せよ。（余力のある人は、一般の k について計算してみよ。* 以外は難しくない。）

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(12)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(13)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(14)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(15)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(16)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5　次の等式を満たす行列 A を一つ見つけよ。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6　次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7　全ての成分が実数でありかつ次の等式を満たす行列 A は存在しないことを示せ。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8　何乗かすれば零行列になってしまうような正方行列を**べき零行列**と言う。2 次の正方行列 A が $A^3 = O$ を満たすならば、実は $A^2 = O$ であることを、A が上三角行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

である場合について示せ。

線形代数１・演習問題—No.3—

$\boxed{\text{置換}}$

9　次の置換を互換の積で表せ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10　置換 σ の符号 (偶置換は 1, 奇置換は -1) を $\operatorname{sgn}\sigma$ で表すとき、

$$(1)\quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を求めよ。

線形代数１・演習問題—No.4—

行列式

11　次の行列式を計算せよ。((6) は答の式を因数分解せよ。(7) の行列式は n 次とする。)

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

12_a　a, b, c はいずれも実数とする。行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

を計算せよ。また、この行列式が 0 となるための a, b, c に関する条件を、出来る限り簡単な形で求めよ。

12_b　a, b はいずれも実数とする。次の行列について、行列式 $|A|$ を求めよ。また、$|A| = 0$ となるための a, b に関する条件を、出来る限り簡単な形で求めよ。

$$A = \overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} -a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & -a \end{pmatrix}}$$

13　a, b, c, λ はいずれも実数とする。行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix}$$

を計算せよ。また、この行列式が 0 となるような実数 λ を全て求めよ。

線形代数１・演習問題—No.5—

逆行列

14　a, b は実数とする。2 次正方行列

$$A = \overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}}$$

と自然数 n に対し、A^n を求めよ。さらに、特に $a \neq 0$ のとき、A^{-1} を求めよ。

15　3 次正方行列

$$A = \overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} b & 1 & c \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

の逆行列 A^{-1} を、掃き出し法 (拡大係数行列 $(A \mid E)$ の行変形) によって求めよ。

16　問 12_b の行列 A について、$|A| \neq 0$ をみたす a, b に対し、逆行列 A^{-1} を求めよ。

17　次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

線形代数１・演習問題—No.6—

$\boxed{\text{連立方程式}}$

18　次の連立方程式を、逆行列またはクラーメルの公式を用いて解け。（加減法、代入法等による解答は認めない。）

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -10 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -6 \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = -9 \\ -7x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 = -3 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 13 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

線形代数１・演習問題—No.7—

$\boxed{\text{空間ベクトル}}$

19　二つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ および点 $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

(1)　次を計算せよ。

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}|, \quad |\boldsymbol{b}|, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

(2)　点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と平行な平面の方程式を求めよ。

(3)　点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直な直線の方程式を求めよ。

((2), (3) 共に、公式に値を代入するだけの解答は認めない。)

20　次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および点 P について、下の各問に答えよ。

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1)　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), |\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

(2)　点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と平行な平面の媒介変数表示を求めよ。

(3)　(2) の平面の媒介変数を用いない方程式を求めよ。

(4)　点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直な直線の媒介変数表示を求めよ。

21　次の二つのベクトルについて、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), |\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$ を計算せよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 - 3i \end{pmatrix}.$$

線形代数１・演習問題—No.8—

$\boxed{\text{空間ベクトル}}$(続き)

22　$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{b}_1| = |\boldsymbol{b}_2| = 1$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ を満たす四つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ に対し、

$$\begin{aligned} P &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2)\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)^{-1} \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2)\,{}^t(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \end{aligned}$$

とおくと、P は直交行列で、$P\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$, $P\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2$ を満たすことを確かめよ。

23_a　四つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は、

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{32}{33} \\ \frac{8}{33} \\ \frac{1}{33} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{33} \\ \frac{31}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。それぞれの場合について、次の各問に答えよ。

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は、いずれも単位ベクトルであること、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ が、それぞれ直交することを確かめよ。

(2)　外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2$ を求めよ。

(3)　$P\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1, P\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

線形代数1・演習問題—No.9—

$\boxed{\text{空間ベクトル}}$(続き)

23_b　次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について、下の各問に答えよ。

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は、いずれも単位ベクトルであること、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ が、それぞれ直交することを確かめよ。

(2)　外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ を求めよ。

(3)　$P\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

24　次のベクトルの組に Schmidt の直交化法を施し、正規直交基を作れ。

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

線形代数１・演習問題—No.10—

$\boxed{\text{空間ベクトル}}$(続き)

25　二つの n 項数ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、中線定理

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$$

を示せ。

26　三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し、次の等式を示せ。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$$

27　二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、次の等式を示せ。（定義に戻って直接示せ。）

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0$$

28　二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、次の等式を示せ。

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

29　二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、次の等式を示せ。

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$$

30　三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し、次の等式を示せ。（直接示せるが、問 26 の公式を用いた解答も可。）

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

線形代数１・演習問題—No.11—

空間ベクトル＋連立方程式

31　次の連立方程式について、下の各問に答えよ。(一般解を、非斉次方程式の特殊解と斉次方程式の一般解の和の形で表せ。)

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$　(d) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 3 \\ 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$　(f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$　(h) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$　(j) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$　(l) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

(1)　この連立方程式の解を一つだけ求めよ。

(2)　この連立方程式の解全体の集合は、3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の直線である。この直線と平行な（ $\mathbf{0}$ でない）ベクトルを一つ求めよ。

(3)　(2) の直線を次の形で表せ。

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + t x_{11} \\ x_2 = x_{20} + t x_{21} \\ x_3 = x_{30} + t x_{31} \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

線形代数１・演習問題—No.12—

行列の階数

32　行列 A の階数 (基本変形で得られる階段行列の段数) を rank A で表すとき、

(1) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

を求めよ。

33　a は実数とする。行列

$$A = \overset{(a)}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}},\ \overset{(b)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}},\ \overset{(c)}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}},\ \overset{(d)}{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}},$$

$$\overset{(e)}{\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}},\ \overset{(f)}{\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}},\ \overset{(g)}{\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}},\ \overset{(h)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}},$$

$$\overset{(i)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}}$$

について、階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ。

34　a, b, c は実数とする。行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|B|$ を求めよ。

(2)　階数 rank B を求めよ。

線形代数１・演習問題—No.13—

$\boxed{\text{行列の階数}}$(続き)

35　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ。

(2)　$a \neq 0$ でかつ $|A| = 1$ となる a の値を求めよ。

(3)　(2) で得た値の a について、A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(4)　一般の a に対し A の階数を調べよ。

36　a は実数とする。3 次正方行列

$$A = \overset{\text{(a)}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}},\quad \overset{\text{(b)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & a^2 & a^4 \end{pmatrix}}\quad \overset{\text{(c)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}}$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ。

(2)　$|A| \neq 0$ となる a の条件を求めよ。

(3)　A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ。

(4)　(2) で得た条件を満たす a について、A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(5)　(2) で得た条件を満たさない a について、$\mathrm{rank}\, A$, $\mathrm{rank}\, \widetilde{A}$ を求めよ。