

線形代数1・講義資料

第 1 回

(2023年4月14日(金)講義分)

第 1 回

(第 0 回が未読の人は、本題に入る前に、まずそちらに一通り目を通しておいて下さい。)

まずこの講義で扱う内容ですが、一言で言うと高校で学んだベクトルの続きです。

高校数学では、実数を 2 個または 3 個、横に並べてかっこでくくった数ベクトルについて学んだと思いますが、今度は実数を縦横に、長方形(正方形を含む)に並べたものを**行列**と呼んで、いろいろ考えようと言うわけです。

ここでは実数を並べると言っていますが、この講義より先に進むと、複素数まで広げて考えた行列も出て来ます。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

は、どちらも 2×3 行列(2 行 3 列の行列)です。これらの和(足し算)は、数ベクトル同様、同じ場所にある成分どうしで行います。

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + 2 & 1 + 7 & 4 + 1 \\ 1 + 8 & 5 + 2 & 9 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 9 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

差(引き算)も同様です。

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - 2 & 1 - 7 & 4 - 1 \\ 1 - 8 & 5 - 2 & 9 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

実数との積(スカラー倍と呼びます) も、数ベクトル同様、全ての成分に一斉にかけます。

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

ここまでは、到って簡単です。

ところが、この行列 A と B の積は定義しません。でも、 A と 3×2 行列

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

の積なら…

C は実は B の転置行列 tB です(教科書7頁参照)。

$$AC = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 8 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 8 \\ 1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 1 & 1 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 58 \\ 46 & 90 \end{pmatrix}$$

となります。

行列に関する用語の定義や演算についての詳しいことは、教科書の §1, §2 を読んでもらうことにして(今回に限り §2 (次回分)まで、先に軽く目を通していただいた方がよいでしょう)、今回は、なぜ行列を考えるのか、また行列の積(かけ算)はなぜ上のような一見変な感じに定義されるのかということについてお話ししたいと思います。

皆さんは高校までに、いろいろな関数について学んで来たと思います。その中で最も基本的なものと言うと、やはり一次関数 $y = ax + b$ ではないでしょうか？中でも定数項 b の無い $y = ax$ は、比例と言う関係を表すものとして、かなり早い時期に学んだことと思います。

比例とはどういうことだったかと言え、 x を 2 倍すれば y も 2 倍、 x を 3 倍すれば y も 3 倍になる、これを式で書けば、

$$2y = a \times (2x), \quad 3y = a \times (3x)$$

ということになりますが、要するに x と y が何倍に変化するかが、完全に連動している関係であって、これは**比例するとわかってさえいれば**、一組のデータを観察するだけで、**比例定数** a が求められるため、他のデータの対応も全て一瞬でわかってしまうということの意味しています。

グラフを描くと、原点を通る直線になるということからも、このことは感じ取れます。原点(0 には 0 を！)とそれ以外の 1 点を通る直線はただ一つで、定規を当ててさっと線を引けば、おしまいということなのです。

一般の一次関数 $y = ax + b$ も、

$$y = a \left(x + \frac{b}{a} \right) \quad \text{または} \quad y - b = ax$$

と式変形してみれば、 y が $x + b/a$ に比例している、または $y - b$ が x に比例していると見ることができます。グラフを書いたらやはり直線だけれども、原点を通るとは限らない(0 には b を!) という違いがあるだけです。

しかし一般の関係は、このように簡単ではなく、それでいろいろな関数を考える必要が出て来るわけですが、それらの関数は概して扱いが難しい。そこで、それらについて調べるのに、どうしたかと言うと、一般の関数でも x の値が近いところでは、 y の値について、比例もしくは一次関数と大して違わない関係が成り立っているだろう、まあ誤差の範囲だろうと言う希望的観測の下に、一次関数で近似してしまおうと考えたわけです。

これがまさにグラフに接線を引く行為であり、そのためには微分が必要になって来ます。初等関数と呼ばれる、よく登場する基本的な関数については、この方法が存外うまく役立つため、皆さんは高校で微分について多くのことを学び、関数の増減やグラフの凹凸などは、結構扱えるようになったことと思います。

さて、大学に入って皆さんは、関数を一般化した**写像**について学ぶことになります。関数とは実数 x に対しそれぞれ一つずつ、何らかのルール(意味不明なルールも込み)に従って、実数 y を与える対応であって、これを $y = f(x)$ と表したわけですが、ここで x や y は別に実数でなくてもよいのではないかとして、一般的に考えた対応を写像と呼びます。

ただし y の方が実数である限りは関数と呼ぶことが多く、たとえば x として実数ではなく座標平面($\mathbf{R}^2$ と書きます)上の点 (x_1, x_2) を考えたりするとき、 $y = f(x_1, x_2)$ のことを、平面上の関数とか、**2変数関数**などと呼びます。

中でも最も基本的なのはやはり 2 変数の一次関数で、一般的に書くと

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$$

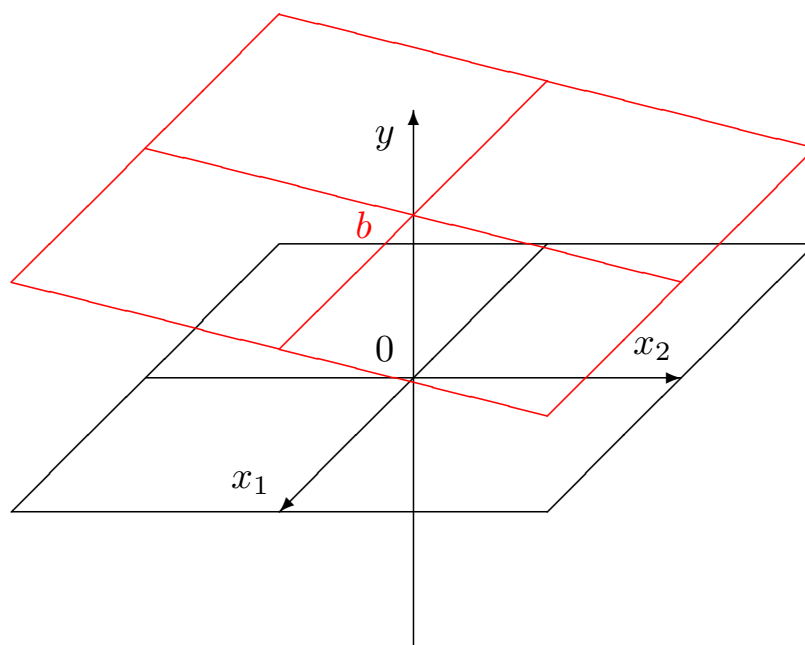
となります。

その定義域、つまり (x_1, x_2) の動く範囲は平面なので、その上にグラフを描こうとすると 3D が必要です。ここで、この関数を、 x_2 または x_1 のどちらか一方を固定して考えると、変数が一つだけの一次関数

$$\begin{aligned} y &= a_1x_1 + (a_2x_2 + b) \\ y &= a_2x_2 + (a_1x_1 + b) \end{aligned} \quad (\text{カッコ内は定数と思う})$$

になり、そのグラフは直線です。

つまりこの関数の 3D で描かれたグラフは、 x_2 または x_1 が一定であるような座標空間内の縦の平面によるどの断面を見ても直線と言うことで、結局平面になります。ここで a_1 が x_1 方向の傾き、 a_2 が x_2 方向の傾きで、これなら 1 変数の一次関数のグラフであった直線とある程度は同じように扱えそうです。



一方、一般の 2 変数関数のグラフは平面ではなく (広い意味での) 曲面になるのですが、これを詳しく調べるには、やはり一次関数で近似する、つまり **接平面** を考えることが、有力な手段になります。そのためには 2 変数関数の微分 (**偏微分** とか **全微分** とか) を導入する必要が出て来るわけです。詳しいことは解析IIで学びますが、やはり一次関数が基本と言うことを、多少は実感していただけただけでしょうか？

さて、今回この講義と直接係わって来るのは、やはり y の方も実数以外を考えた写像です。典型的な例は x も y も座標平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点を考えた対応 $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ です。これは $\mathbf{R}^2$ 上の点 (x_1, x_2) に対し、やはり $\mathbf{R}^2$ 上の点 (y_1, y_2) を何らかのルールで対応させようと言うものですが、それを具体的に表そうとすれば、当然各成分 y_1, y_2 を、それぞれ (x_1, x_2) を用いて表す必要が出て来ます。つまり

$$(y_1, y_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

ということで、ここで f_1, f_2 は 2 変数関数です。

そうなる、その中で最も基本的となるのはやはり、この f_1 , f_2 が共に一次関数である **一次写像**

$$(y_1, y_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$$

ということになって来ます。中でも特に定数項が無い

$$(y_1, y_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

を **線形写像** と呼びます。

ここで、線形写像は一般に x_1, x_2 を同時に 2 倍すると、 y_1, y_2 も同時に 2 倍になる (3 倍でも同様) という比例と共通の性質を持っていることに注意しましょう。実はこの性質こそが **線形** と呼ばれる理由 (の半分) なのです。 (もう半分はまた改めて。)

ちょっと具体例を見てみましょう。今、座標平面上の全ての点を、原点を中心として左回り(反時計回り)に90度回転させるとどこに移るかと言う対応を考えてみましょう。この対応は全ての点に対して、それぞれ一つずつ行き先が決まるので写像であると言えます。具体的に式で書くと

$$(y_1, y_2) = (-x_2, x_1)$$

或いは、写像 f と呼ぶことを明記して

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

と表されます。これは定数項のない二つの一次関数で表されているので、線形写像です。

では60度回転ではどうでしょうか？具体的に式で書くと

$$(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)$$

或いは

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)$$

と表されます。これも線形写像です。

ここで、一般に線形写像

$$(y_1, y_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

を、一まとめにして表すことを考えます。なぜそんなことを考えるのかと言うと、これからは、座標平面 $\mathbf{R}^2$ だけでなく、さらにより一般の n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ について、線形写像を扱いたいからです。 $\mathbf{R}^n$ の各元は n 個の実数の組 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表されることになります。

実はこれが、ここまで座標平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点を (x, y) で表さなかった理由です。別に (x_1, x_2) を (x, y) と表しても、そのかわり (y_1, y_2) を例えば (z, w) などと他の文字で表せば間違いではないし、実際そのようにしている場合は多いのですが、次元が上がり、必要な文字数が増えてくると、何分アルファベットは 26 文字しかありませんし、定数と変数を区別する必要から、それらも全て自由に使えるわけではないので、どうしても無理になって来るわけです。

n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の点を m 次元空間 $\mathbf{R}^m$ の点に対応させる線形写像を一般的に書くと、

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, \dots, y_m) = (&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\&\dots \\&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\end{aligned}$$

となりますが、こうなるとさすがにちょっと工夫したい。

そこで、ちょっと発想の転換で、まず n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の点を、実数を横に並べた行ベクトルではなく、縦に並べた列ベクトル

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で表すことにします。

ここで $:=$ は右辺の式により左辺を定義するという意味です。また、この講義では、ベクトルは $\vec{x}$ ではなく矢印無しの太字 $\boldsymbol{x}$ で表します。

なお、行ベクトルと列ベクトルは、転置 t で写り合うと言っても、あくまで別のベクトルですから、演算を考えるとき、勝手に入れ替えてはいけないことに注意して下さい。以下の議論は、あくまでも $\mathbf{R}^n$ の点を列ベクトルで表すことが前提です。

そして、 n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ の mn 個の係数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ を縦に m 個、横に n 個並べて、 $m \times n$ 行列

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を作ります。

ここで行列と列ベクトルの積は、(教科書 §2 の 16 頁にもあるように、) 左側の行列の各行ベクトルと右側の列ベクトルの間で、内積と同じ方式で各成分を順にかけ合わせたものの合計を、成分として縦に並べればよいということに注意して、行列 A をベクトル x に左からかけてやると、

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

となります。

ここで値の方の m 次元空間 $\mathbf{R}^m$ の点も、 $y_1, y_2, \dots, y_m$ を縦に並べた列ベクトル $\mathbf{y}$ で表すことにすれば、上の線形写像は何と

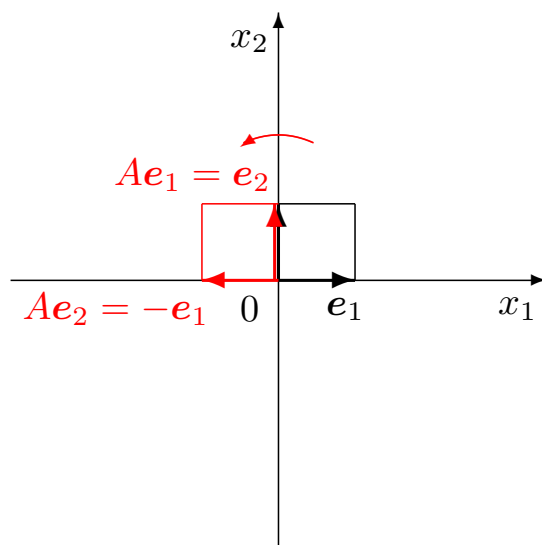
$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

と表せてしまうわけです。

文字で置き換えただけと言えばそれまでですが、例えば 1 変数どうしの関係で、比例することがわかってさえいれば、比例定数 a で全ての関係が決まったように、**線形写像であることがわかってさえいれば、後は係数 a_{ij} たちが全てを決める**ので、それだけ取り出して、行列として処理するのが効率的であることが、先に進むに従って、わかって来ます。

前に考察していた回転に戻って考えると、90度は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

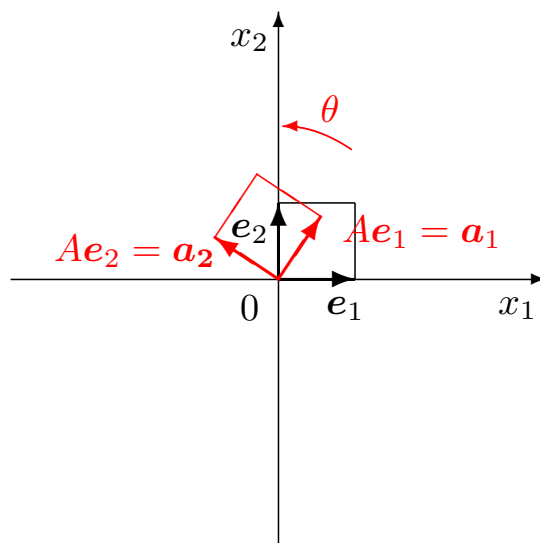
60度は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

実はより一般に、原点を中心に左回り θ (ラジアン) 回転する写像は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表されます。



n 次元の列ベクトル x に左から $m \times n$ 行列 A をかけることは、 $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f を表していました。ここでこれとは別に m 次元の縦ベクトル y に左から $\ell \times m$ 行列 B をかけることで、 $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^\ell$ への線形写像 g を表すことにします。このとき、合成関数と同じように、 $\mathbf{R}^n$ から ($\mathbf{R}^m$ を通って) $\mathbf{R}^\ell$ への写像を合成写像 $g \circ f$ として考えることができます。

この写像は $y = f(x)$ と $z = g(y)$ の合成ですから、

$$z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

が成り立ちます。最後の等号で(行列やベクトルの積に関する) 結合律を利用しています。その結果、合成写像 $g \circ f$ は行列の積によって得られる $\ell \times n$ 行列 BA により表されることがわかりました。つまり、**行列の積は、線形写像の合成**を表すように定義されているのです。

例えば、原点を中心とし左回り α 回転を表す行列を A とし、 β 回転を表す行列を B としましょう。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

です。ここで、 α 回転してから β 回転しても、 β 回転してから α 回転しても、結果は同じ $\alpha + \beta$ 回転ですから、これを表す行列はそれぞれの角度の回転を表す行列の(どちらからかけても同じ) 積として得られます。

つまり

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = BA = AB$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

となり、三角関数の加法定理が得られます。

倍角、3倍角の公式などを忘れたときも、行列の積(この場合は**べき乗**) $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = (AA)A$ を実行すれば、公式が復元できます。皆さんはちゃんと覚えているかもしれませんが、折角なので、ここでちょっと計算してみましょう。

2 次正方行列 (2×2 行列) どうしに限らず $\ell = n$ のとき一般に、行列の積 BA とはかける順番を変えた積 AB が考えられますが、これは別の合成写像 $f \circ g$ を表しており、この写像は一般には写像 $g \circ f$ とは別の写像になるので、実数どうしの積とは違って、**行列どうしの積はかける順番を前後入れ替えてはいけません。**

例えば、原点中心左回り 90 度回転の行列 (前出) を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

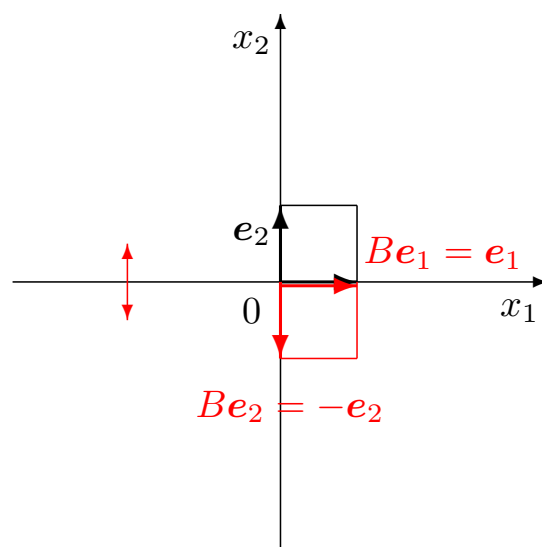
としましょう。

一方 x_1 軸 (原点を通る水平な直線 $x_2 = 0$) に関する線対称移動

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \text{ を表す行列は}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

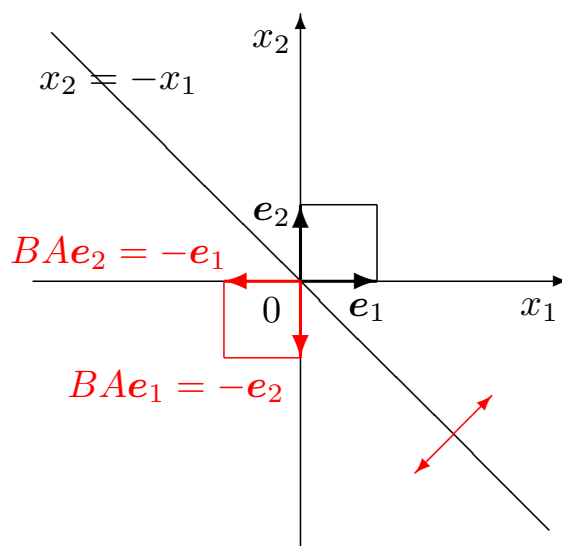
です。



左回りに90度回転してから x_1 軸について線対称移動すると、

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

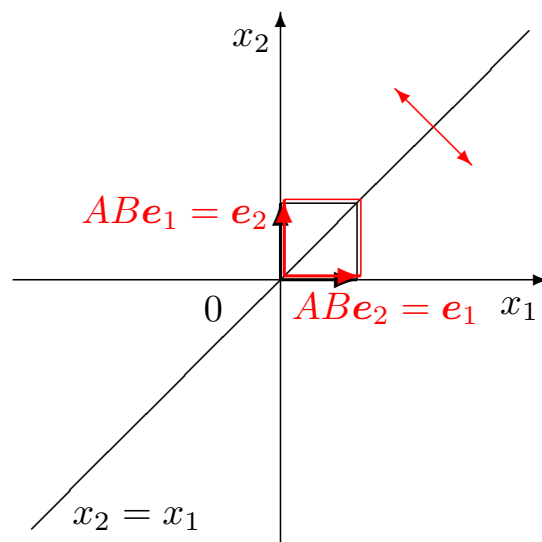
より、直線 $x_2 = -x_1$ に関する線対称移動 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ となることがわかります。



一方、先に x_1 軸について線対称移動してから左回りに90度回転すると、

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より、直線 $x_2 = x_1$ に関する線対称移動 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ となり、明らかに別の写像になっています。



今回見て来ましたように、行列は列ベクトルに左からかけることで線形写像を表しているのですが、これは、一般の写像の一次写像による近似を考える際にも、その微分係数を成分とするヤコビ行列として登場します。

行列を考える目的は、今回ご紹介したことが全てではありませんが、重要な目的の一つであるには違いありません。従って、これから行列について学んでゆくにあたり、意味がよくわからないときは、線形写像として見れば今何をしているのだろうと思い描くことにより理解が進むことも少なくないでしょう。