線形代数1・講義資料

第２回

(2023年4月21日(金)講義分)

第２回本題

皆さんは前回教科書 §1 を読んで、正方行列の内、特に重要なもの(零行列、単位行列、スカラー行列、対角行列、上三角行列、下三角行列、対称行列、交代行列) について、学ばれたことと思います。2 次と 3 次の場合で、復習しておきましょう。

次数	2	3
零行列 O	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
単位行列 E, I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
スカラー行列 $a_{11}E$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$

次数	2	3
対角行列	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
上三角行列	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
下三角行列	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

任意の $2 \times n$ または $3 \times n$ 行列 B, $m \times 2$ または $m \times 3$ 行列 C に対し、$OB = O$(ただし B と同じ型), $CO = O$(ただし C と同じ型), $EB = B$, $CE = C$(変わらない), $(a_{11}E)B = a_{11}B$, $C(a_{11}E) = a_{11}C$ (スカラー倍と同じ) が成り立ちます。

上の B に対し、上の対角行列を左からかけると、B の第 i 行をそれぞれ a_{ii} 倍してできる行列が得られます。また、上の C に対し、上の対角行列を右からかけると、C の第 j 列をそれぞれ a_{jj} 倍してできる行列が得られます。

上三角行列、下三角行列はそれぞれ、上半三角行列、下半三角行列と呼ぶことも多いです。

次数　　2　　3

対称行列　$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

交代行列　$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$

交代行列は §2 で登場。反対称行列、歪対称行列とも呼ばれます。

一般に、行列 A に対し、行と列を入れ替えてできる行列を A の転置行列と呼び、${}^tA$ で表します。

次数	2	3
行列 A	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
A の転置行列 ${}^tA$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

A が上(下)三角行列のとき、${}^tA$ は下(上)三角行列になります。
${}^tA = A$ を満たす(転置しても変わらない) のが対称行列、
${}^tA = -A$ を満たす(転置すると -1 倍になる) のが交代行列です。

最近は、転置行列を A^T と表記する本も見かけますが、A の T 乗と間違えかねないので、この講義では、教科書同様に昔からの表記 ${}^tA$ を用います。

もう一つ、転置行列を用いて定義される重要な行列に直交行列があります。教科書では、ずっと後の §8 での登場になりますが、早めに知っておいて損は無いので、ここでご紹介しておきましょう。

n 次正方行列 A が${}^tAA = E$ を満たすとき、(n 次の)直交行列と呼びます。$j = 1, 2, \ldots, n$ に対し A の第 j 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ で表すことにすると、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対し${}^tA$ の第 i 行の行ベクトルは${}^t\boldsymbol{a}_i$ で表されます。よって、行列の積の定義より、${}^tAA$ の (i, j) 成分は${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j$ で与えられます。これは内積$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle$ に他なりません。

従って、A が直交行列であるための条件は

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(A の各列は単位ベクトルで、異なる列どうしは互いに直交する)

となります。

ちなみに、このように行列を列ベクトル毎に分けて $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ のように表すのは、§3 の行列の分解の一つです。

ここではベクトルの内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表しましたが、$(\cdot, \cdot)$ で表すことの方が多いかもしれません。なお、教科書にもあるように、右辺の場合分けは、しばしばクロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いて表されます。

上の条件の意味する所を、前回お話したような、行列の表す線形写像として考えると、実は直交変換と呼ばれる等長変換であると言うことになります。ここで「等長」とは長さも角度も変えないと言う意味で、「変換」は同じ集合どうしの一対一写像のことです。線形写像であると言う前提から原点は原点に写すと言う縛りもあります。

もう少し厳密な説明の方がよいと言う人のために、少しだけ詳しく記しておきます(教科書238頁参照、後期の範囲)。

まず、長さや角度はベクトルの内積を用いて表せることを思い出しておきましょう。すると、行列 A を左からかける線形写像が「等長」であるとは、どんなベクトルどうしの内積も変えない、つまり任意の(n 次の)列ベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$に対して、

$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$$

を満たすと言うことになります。

ここで内積は $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ と表せることを用いると、上の条件式は、

$$ {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} \;=\; {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} $$

と書き換えられます。一方転置の性質から左辺は

$$ {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y} \;=\; ({}^t\boldsymbol{x}{}^tA)A\boldsymbol{y} \;=\; {}^t\boldsymbol{x}({}^tAA)\boldsymbol{y} $$

で、一方単位行列 E はかけても相手を変えないので、条件式はさらに、

$$ {}^t\boldsymbol{x}({}^tAA)\boldsymbol{y} \;=\; {}^t\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y} $$

と書き換えられます。

ここで、

$$ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} $$

つまり、$j = 1, 2, \ldots, n$ に対し第 j 成分が 1 で他の成分は全て 0 と言う(n 次の)列ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ とします。

上の条件式は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について成り立つのですから、特に$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$ を代入しても成り立ちます。

$$ {}^t\boldsymbol{e}_i({}^tAA)\boldsymbol{e}_j \;=\; {}^t\boldsymbol{e}_i E \boldsymbol{e}_j $$

ところが、この等式は、行列 ${}^tAA$ の (i, j) 成分と単位行列 E の (i, j) 成分が一致すると言う等式に他なりません。

今、 i, j は自由に選んでよかったので、結局全ての成分が一致して、「等長」であるための条件が、${}^tAA = E$ であることが確かめられました。

直交行列に関する一般的なことは、準備ができた後でもう一度お話することにして、ここでは 2 次の直交行列について、少し具体的に見ておきましょう。

2 次の場合、正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

が直交行列であるための条件は

$$\begin{cases} {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 = 1 \\ {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

です。

第１式と第２式から、$\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ をうまく選べば、

$$\begin{cases} (a_{11}, a_{21}) &= (\cos\theta, \sin\theta) \\ (a_{12}, a_{22}) &= (\sin\varphi, \cos\varphi) \end{cases}$$

と表せます。これを第３式に代入すると

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = 0$$

ですが、この左辺は$\sin(\theta + \varphi)$ と等しいので、

$$\theta + \varphi = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

です。

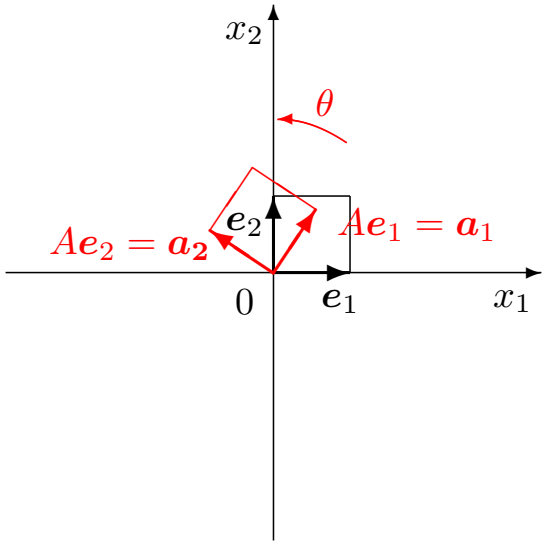
n が偶数の場合、(n の選び方によらず)

$$(a_{12}, a_{22}) = (\sin(-\theta), \cos(-\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

より

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

これは前回もお話した、原点中心の左回り θ 回転を表す行列です。これは確かに長さも角度も変えない一対一写像です。



一方 n が奇数の場合、(やはり n の選び方によらず)

$$(a_{12}, a_{22}) = (\sin(\pi - \theta), \cos(\pi - \theta)) = (\sin\theta, -\cos\theta)$$

より

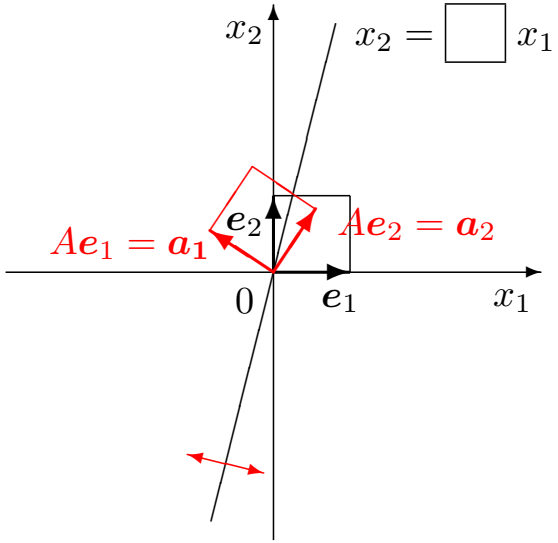
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

これは、$\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ のときそれぞれ前回もお話した、x_1 軸、直線 $x_2 = x_1$, 直線 $x_2 = -x_1$ に関する線対称移動を表す行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ですが、実は一般の θ についても、原点を通るある直線に関する線対称移動を表しています。これも確かに長さも角度も変えない一対一写像です。

どのような直線に関する線対称移動か、調べてみましょう。



一般の行列が表す線形写像は、上のような等長変換ではありません。もう一度 2 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

で考えてみると、ベクトル

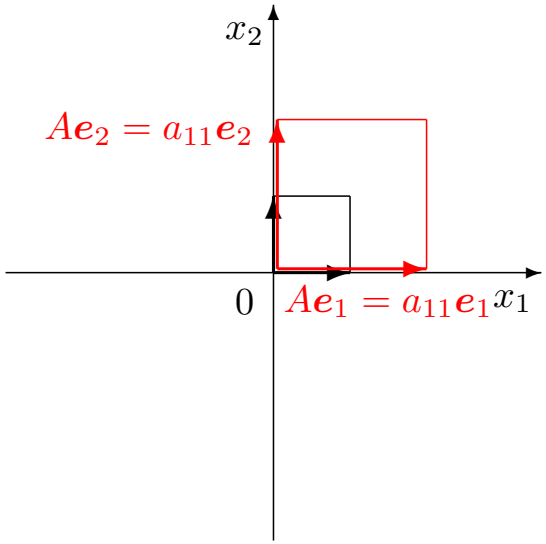
$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し、

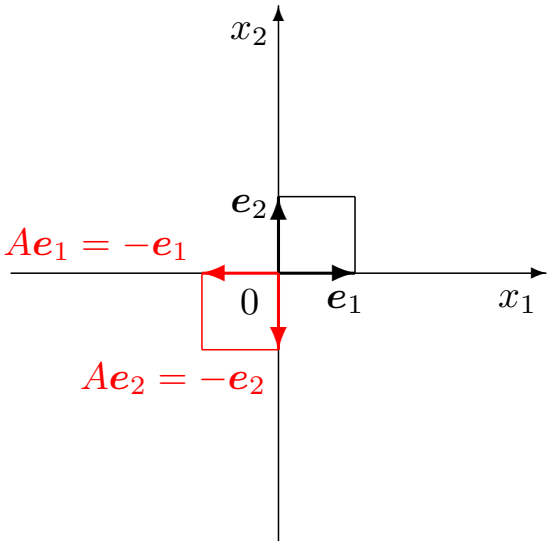
$$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$$

すなわち、$\boldsymbol{e}_1$ を第１列 $\boldsymbol{a}_1$ に、$\boldsymbol{e}_2$ を第２列 $\boldsymbol{a}_2$ に、それぞれ写す線形写像を表しているのです。

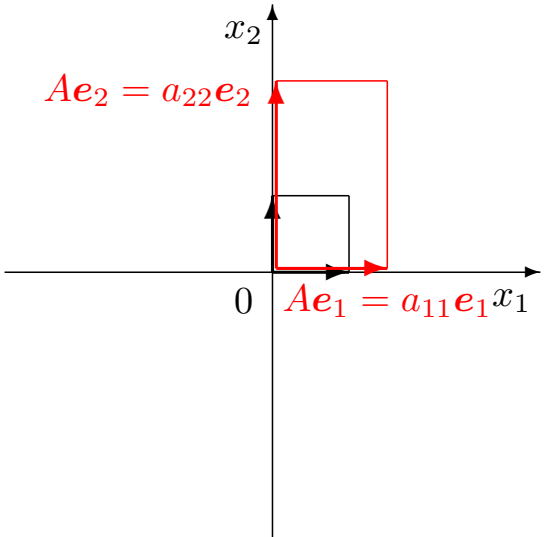
例えば、A がスカラー行列 $a_{11}E$ ならば相似拡大(または縮小)、



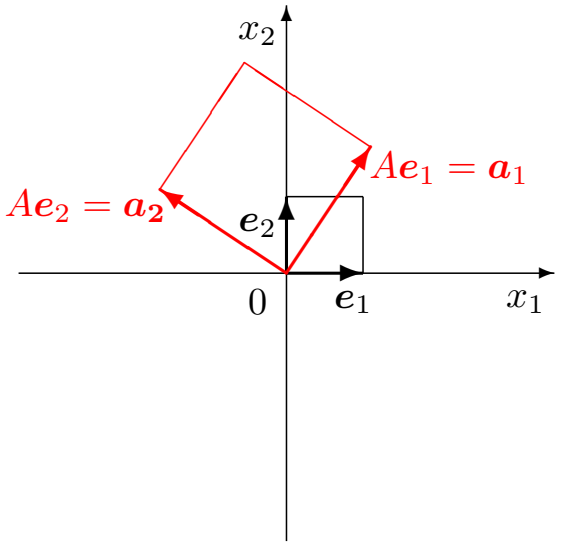
もっとも $-E$ のときは180度回転つまり点対称移動ですが、



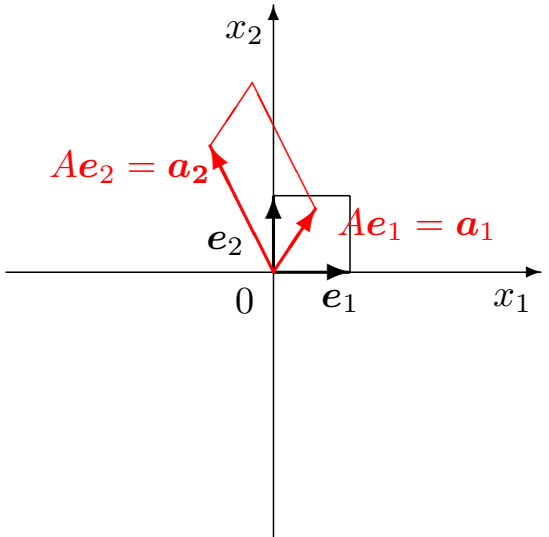
スカラー行列でない対角行列なら、



回転を表す直交行列のスカラー倍なら、



でも一般の行列なら、こんな感じです。



第１回練習課題の解答

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos^2\alpha - 1 & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 1 - 2\sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^3$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha & -3 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha \\ 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha & \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha & -3 \sin \alpha + 4 \sin^3 \alpha \\ 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha & 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{pmatrix}$$