

線形代数1・講義資料

第3回

(2023年4月28日(金)講義分)

第3回本題

教科書 §3 で導入された行列の分割とは、行列のいくつかの行、いくつかの列をひとくくりにして、小さい行列の**ブロック**に分けることでした。ブロックに分割された行列どうしの足し算引き算はブロック毎に行えばよいですし、かけ算も、ブロックどうしで積が定義される限り、各ブロックがまるでスカラーであるかのように、行えばよい(ただし順番は変えてはいけない) と言う、とても使い勝手のよいものです。

行列の分割の中でも特に重要なのは、左上から右下への対角線
上に、小さい正方行列が並ぶような分割でしょう。

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & \mathbf{b}_1 \\ \hline A_{21} & A_{22} & \mathbf{b}_2 \\ \hline \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ \hline a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right)$$

これは後期に解析IIで学ぶ対角化の、さらに一般化であるジョルダンの標準形で使われます。

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & O & \mathbf{0} \\ \hline O & J_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right)$$

ブロック毎に記号を設けた表記のとき(上の等式では中央の式)では、仕切りの線は入れないことも多いです。

もう一つの重要な分割は、行列を行ベクトルたちまたは列ベクトルたちに分けてしまっていて考えるものです。この分割については、この講義資料でも、実は既に使っています。

それは、 $\ell \times m$ 行列 B と $m \times n$ 行列 A の積 BA が、左側の行列 B の行ベクトルと右側の行列 A の列ベクトルの $1 \times m$ 行列と $m \times 1$ 行列としての積を成分とすると言う所で、

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_\ell \end{pmatrix}, \quad A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$$

に対し、

上の A では、仕切りの線を入れない代わりに、「 $,$ 」を入れることもあります。

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_\ell a_1 & b_\ell a_2 & \cdots & b_\ell a_n \end{pmatrix}$$

と表せるのでした。(教科書 26 頁参照。 A と B は入れ替わっています。)

一方、行列 A が、ベクトル x に左からかけることによって、線形写像 $y = Ax$ を表していることについてもお話しましたが、ここで、上と同じように $m \times n$ 行列 A を n 個の (m 次元) 列ベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ に分割しておくと、任意の (n 次元) 列ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に対し、

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

が成り立ちます。

一般に、ベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ のスカラー倍の和を、それらのベクトルの一次結合 (または線形結合) と呼びます。従って、行列 A とベクトル x の積 Ax は、 x の成分を係数とする A の列ベクトルの一次結合です。

また、 $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 $y = Ax$ は、 $\mathbf{R}^n$ の各元 x に対し、その成分 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を係数とする $a_1, a_2, \dots, a_n$ の一次結合を対応させる写像と言えます。

通常は、 Ax の各成分を $x_1, x_2, \dots, x_n$ の 1 次式と見て、 A の各成分 a_{ij} を係数と呼びますが、ここでは、 Ax 自身を $a_1, a_2, \dots, a_n$ の一次結合と見ているので、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の方を係数と呼んで説明しています。通常と言葉遣いが違うので注意して下さい。

ここで、

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、(n 次)単位行列は $E = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n)$ なので、上の A として E をとれば、

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

より、 $\boldsymbol{x}$ は、その成分 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を係数とする $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ の一次結合と見なすことができます。

よって、線形写像 $y = Ax$ は、 $e_1, e_2, \dots, e_n$ の一次結合

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の同じ係数の一次結合

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

に写す写像と言うことになります。

このことは、 $n = 2$ の場合については前回もお話しましたように

$$Ae_1 = a_1, Ae_2 = a_2, \cdots, Ae_n = a_n$$

が成り立つことに注意して、行列(とベクトル)の積に関する分配律(と結合律)を用いれば、

$$\begin{aligned}
& A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= A(x_1\mathbf{e}_1) + A(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n A(\mathbf{e}_n) \\
&= x_1(A\mathbf{e}_1) + x_2(A\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n(A\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n
\end{aligned}$$

のようにも導くことができます。

変数 n 個で m 本の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

も、

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

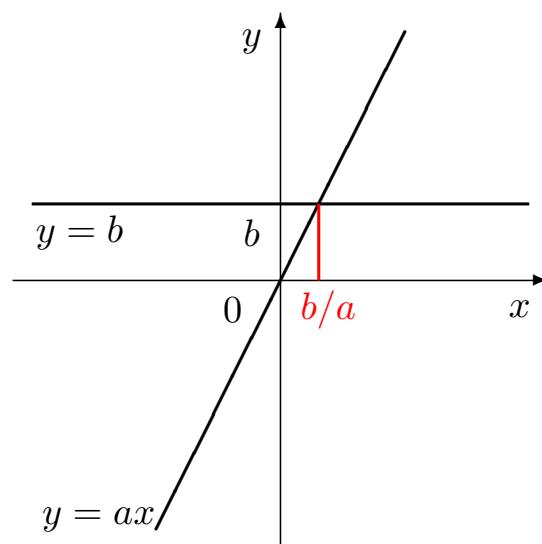
に加えて、

上の A で、 a_{22} と a_{mn} の間が $\cdots$ でないのは、正方行列とは限らないから。

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せるので、この連立方程式が解を持つと言うことは、 $\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{R}^n$ 全体を動くとき、 $A\boldsymbol{x}$ がどこかで $\boldsymbol{b}$ を通過するということを意味しており、さらに言い換えれば、 $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合として表せると言うことになります。

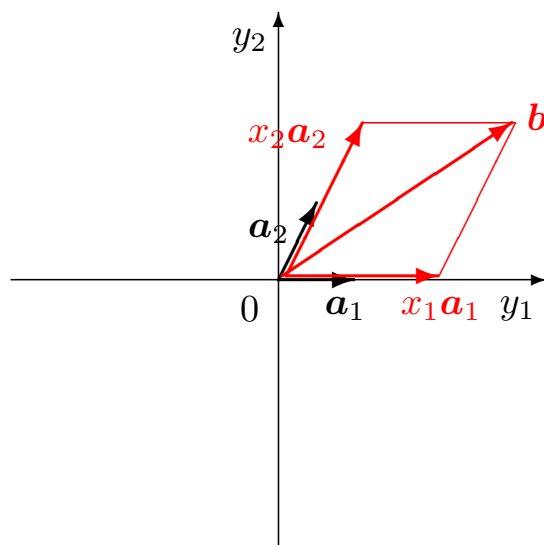
$m = n = 1$ (A, x, b が全てスカラー) の場合について言えば、一次関数 $y = ax$ は、 x が実数全体を動くとき、 y も実数全体を動き、任意の実数 b に対し、 b をその値としてとる x が一つずつ存在します。言い換えると、1 次方程式 $ax = b$ は、必ず、ただ一つの解を持ち、 b は a の x 倍として表せます。



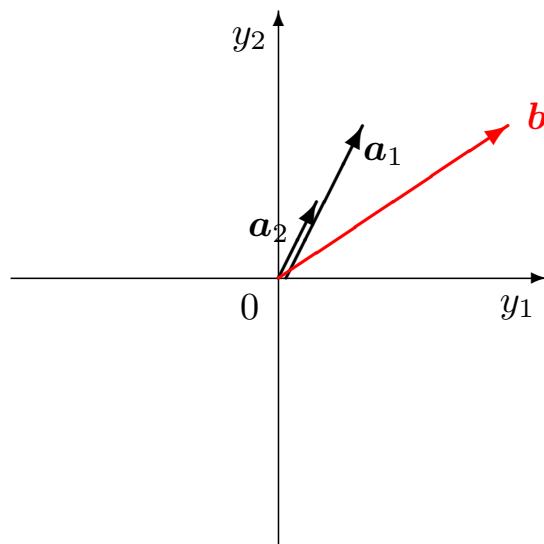
$m = n = 2$ のときが、中学校で学んだ(と思います) 2 元連立 1 次方程式ですが、加減法や代入法などの解法により、多くの場合には**ただ一組の解**(ベクトルとして数えれば一個)が見つかるものの、特別な場合には、**解なし**(**不能**とも言います)だったり、また**無限個の解**を持つ(**不定**とも言います) こともありました。

これらのことを上の考え方に照らし合わせて言い換えると、2 次元ベクトル b は、多くの場合には 2 個の 2 次元ベクトル a_1, a_2 の一次結合として、ただ一通りに表せるけれども、特別な場合には、表すことができなかったり、また無限通りの表し方があったりするということになります。

ちなみに、2 個の 2 次元ベクトル a_1, a_2 の一次結合 $x_1 a_1 + x_2 a_2$ とは、図で表すなら、 a_1 を x_1 倍したベクトルと a_2 を x_2 倍したベクトルを二辺とする平行四辺形(正方形や長方形を含む) の対角線によって与えられるベクトルでした。

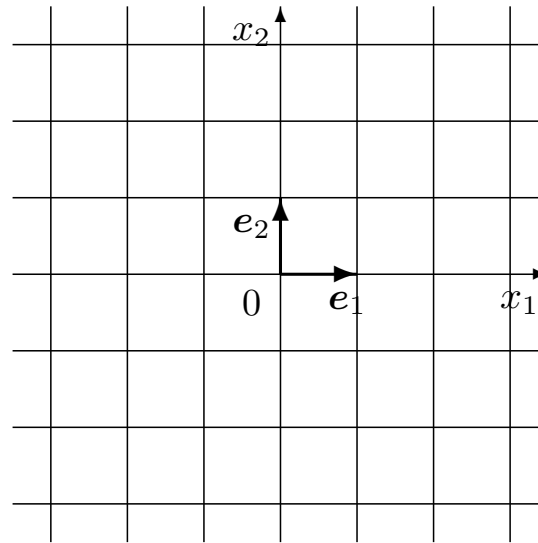


そうやってしまうと、どんなベクトルでも表せてしまいそうですが、特別な場合には平行四辺形を作れないこともあります。 a_1, a_2 が平行(逆向きも含む)か、またはどちらか一方が0 の場合がそれです。そのときは、 b もまた平行でないと表すのは無理です。



ここで、 $m = n = 1$ の場合の $y = ax$ のように、 $y = Ax$ のグラフが描ければ、2 元連立 1 次方程式 $Ax = b$ が解を持つ持たないについて、直観的に理解するのによいのですが、そのためには 4 次元必要です。残念ながらそれは無理なので、前々頁と前頁では y 軸に相当する y_1y_2 平面だけを描いています。

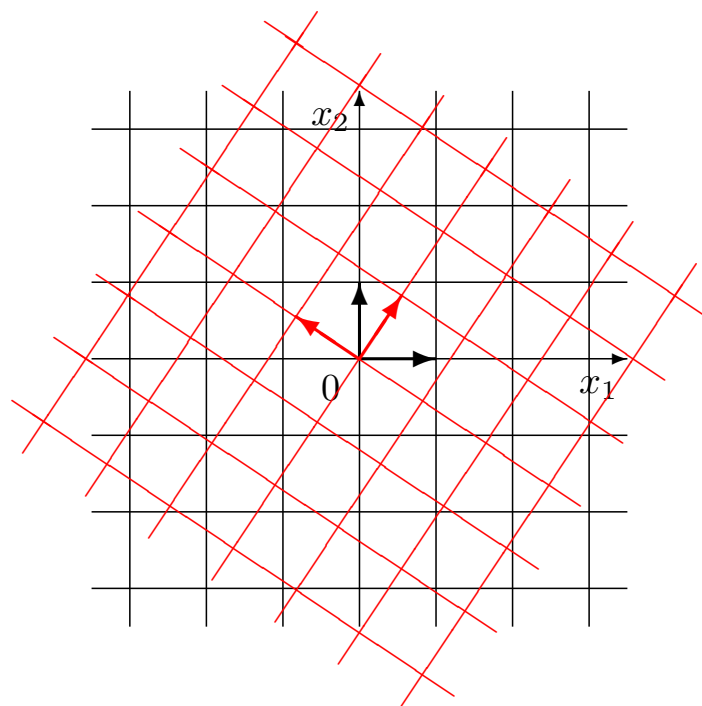
ただし、グラフは描けないまでも、もう少し工夫はできます。まず、とりあえず x 軸に相当する x_1x_2 平面(つまり定義域)上に、 x_1, x_2 の少なくとも一方が整数であるような点を図示してみましよう。



この網目は、線形写像 $y = Ax$ によって、一次結合 $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$ の内、 x_1, x_2 の少なくとも一方が整数であるようなものを位置ベクトルとする点に写ります。そのような点の集合を赤で、元の黒い網目と重ねて図示すれば、この写像が平面全体をどのように変形する(回転する、拡大する、歪める、等々)かが、ある程度直観的に見てとれます。

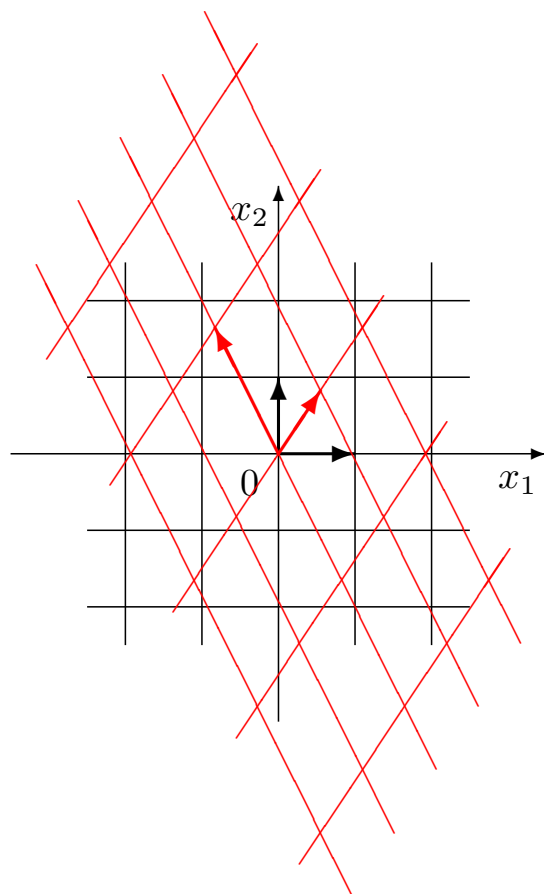
この網目は格子とも呼ばれますが、その場合は交点だけを指すこともありますので、ここでは網目と呼んでおきます。

たとえば、第 1 回でお話した、原点中心左回り θ 回転では、次のようになります。



確かに回っている感じがしませんでしょうか？

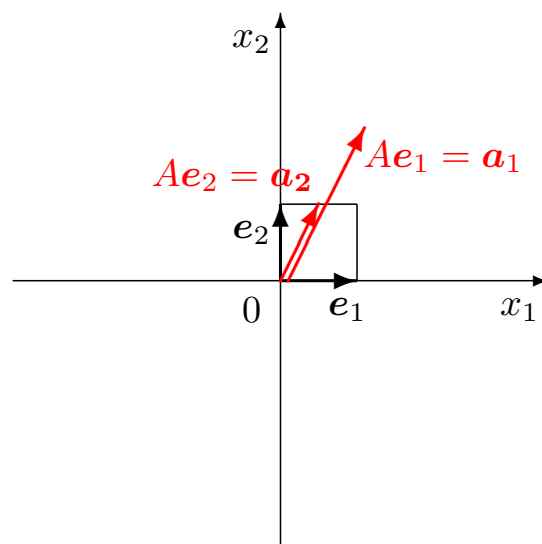
これが前回最後に図示しました、一般の行列が表す線形写像では、



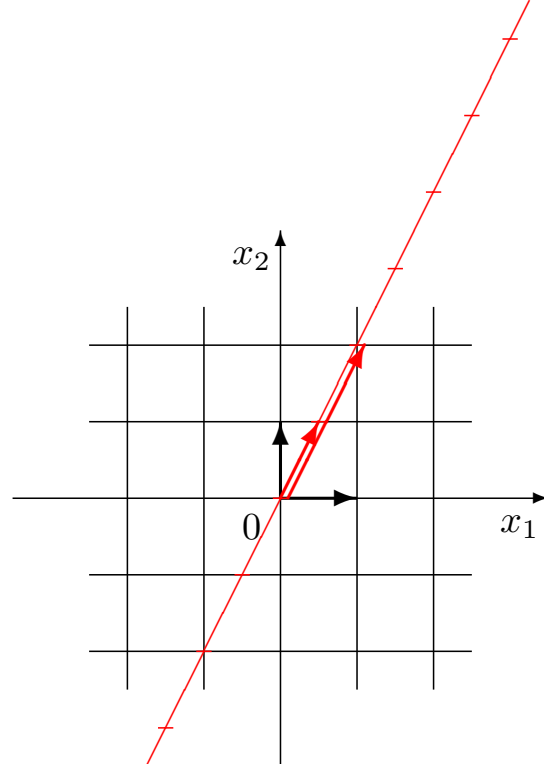
こちらは元々正方形の網目だったものが、平行四辺形の網目に歪んでしまっています。

しかし、どちらの例についても共通して言えることは、網目が平面全体に広がっている (値域が平面全体) ということです。このような場合には、 $Ax = b$ の解が必ず見つかります。

一方、 a_1, a_2 が平行な場合



には、どうなるかと言うと、



のように、網目はつぶれてしまって、平面全体を覆うことはできません(=値域が平面全体ではありません)。この場合、方程式 $Ax = b$ は、網から外れた b に対しては解を持たず、一方、網にかかった b に対しては、網がつぶれている分、無限個の解を持つことになります。

一般の m, n の場合にも、 $m = n$ のときは 2 の場合同様の状況が、また $m > n$ のとき多くは解なしに、 $m < n$ のとき多くは無
限個の解に、それぞれ偏った状況が見られます。それでは A と b
がどんな条件をみたすとき、連立方程式の解の個数が $0, 1, \infty$ の
どれになるのか？そのことをきちんと理解するのが、当面の目標
です。

第2回練習課題の解答

e_1 と $Ae_1 = a_1$ のなす角が θ なので、線対称移動だとすれば、直線の方角ベクトルの偏角が $\frac{\theta}{2}$ でなければならないことはすぐにわかります。従って、求める答えは、

$$y = \tan \frac{\theta}{2} \cdot x$$

です。

でも、もちろんこれで終わりではありません。実際に線対称移動になっていることを示す必要があります。そのために必要なことは、

任意の x に対して、

- (1) x と Ax の中点 $\frac{1}{2}(x + Ax)$ が、この直線上にある。
- (2) $Ax - x$ が、この直線と直交する。

つまり、 x と Ax を結ぶ線分に対して、この直線が垂直二等分線になっていることです。確かめてみて下さい。

