

線形代数1・講義資料

第4回

(2023年5月19日(金)講義分)

第4回本題

前回、行列の分割を用いて、連立方程式を考えることができる
と言うお話をしました。

一般の場合に進む前に、もう少し2元連立1次方程式について、
復習しておきましょう。これまでの流れでは

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

と書くところですが、後で出て来る表記に合わせて、ここでは

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

で考えます。

この連立方程式を、**加減法だけ**で解いて見ましょう。それもただ解くだけでなく、常に 2 本の式を併記して、必要十分であることを維持しながら、 x と y に関する条件を書き換え、最終的に次の形に変形するのが目標です。

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \beta \end{cases}$$

ここで、加減法だけと言う縛りは、厳密には次の操作だけと言うことを意味するものとします。

- (1) 第 1 式の両辺に 0 でない実数をかける。
- (1') 第 2 式の両辺に 0 でない実数をかける。
- (2) 第 1 式と第 2 式を入れ替える。
- (3) 第 1 式に第 2 式の実数倍を足す。
- (3') 第 2 式に第 1 式の実数倍を足す。

(1)(1') は方程式を解くために不可欠で、どちらかと言うと係数でわるのですが、そこは係数の逆数をかけると考えます。

(2) は目標の形に解を並べる(つまり x の解を y の解より先に書く)ためにあります。

(3)(3') で引きたいときは、実数として負の数をとればよいので、それも含みで(3)(3') が加減法の本質的な部分です。

さて、実際に解いて見ましょう。ここで目標の形に合わせて左上から始め、左下、右下、右上の順に揃えて行きます。つまり、まず最初に第1式第1項を x にしたいわけです。

□1 $a \neq 0$ のとき、(1) 第1式の両辺に $\frac{1}{a}$ をかけると、

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{p}{a} \\ cx + dy = q \end{cases}$$

次に、第2式第1項を0にするために、(3') 第2式に第1式の $-c$ 倍を足します。

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{p}{a} \\ (0 \cdot x +) \frac{ad-bc}{a}y = \frac{aq-cp}{a} \end{cases}$$

次に、第2式第2項を y にしたい。

1-1 $ad - bc \neq 0$ のとき (1') 第2式の両辺に $\frac{a}{ad-bc}$ をかけると、

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{p}{a} \\ (0 \cdot x +) y = \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{cases}$$

最後に、第1式第2項を 0 にするために、(3) 第1式に第2式の $-\frac{b}{a}$ 倍を足します。

$$\begin{cases} x (+0 \cdot y) = \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ (0 \cdot x +) y = \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{cases}$$

で、ただ一組の解が得られました。

1-2 $ad - bc = 0$ のとき、連立方程式は

$$\begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{p}{a} \\ (0 \cdot x + 0 \cdot y) = \frac{aq - cp}{a} \end{cases}$$

となりますが、ここで…

1-2-1 $aq - cp \neq 0$ ならば、第2式は成立しえないので(一言「矛盾」で済みますパターンです)、この条件を満たす x, y の組は存在しないことがわかります。

1-2-2 $aq - cp = 0$ ならば、第2式は自動的に成立してしまうので、解は第1式(を元に戻して) $ax + by = p$ を満たす x, y の組全てということになります。

□2 $a = 0$ かつ $c \neq 0$ のとき、(2) 第 1 式と第 2 式を入れ替えると、

$$\begin{cases} cx + dy = q \\ (0 \cdot x +) by = p \end{cases}$$

で、以下同上ですが、一応たどっておきましょう。まず、(1) 第 1 式の両辺に $\frac{1}{c}$ をかけると、

$$\begin{cases} x + \frac{d}{c}y = \frac{q}{c} \\ (0 \cdot x +) by = p \end{cases}$$

2-1 $b \neq 0$ のとき、(1') 第2式の両辺に $\frac{1}{b}$ をかけると、

$$\begin{cases} x + \frac{d}{c}y = \frac{q}{c} \\ (0 \cdot x +) y = \frac{p}{b} \end{cases}$$

(3) 第1式に第2式の $-\frac{d}{c}$ 倍を足すと、

$$\begin{cases} x (+0 \cdot y) = \frac{bq - dp}{bc} \\ (0 \cdot x +) y = \frac{p}{b} \end{cases}$$

で、ただ一組の解。

2-2 $b = 0$ のとき、

$$\begin{cases} x + \frac{d}{c}y = \frac{q}{c} \\ (0 \cdot x + 0 \cdot y) = p \end{cases}$$

2-2-1 $p \neq 0$ ならば解なし。

2-2-2 $p = 0$ ならば解は第 1 式 $cx + dy = q$ を満たす組全て。

3 $a = c = 0$ のとき、連立方程式は

$$\begin{cases} (0 \cdot x +) by = p \\ (0 \cdot x +) dy = q \end{cases}$$

となり、実は x については何の制約もない y のみに関する 1 元連立方程式です。このような場合は初めから除外しておいてもよいのですが、比較対照のために一応見ておきましょう。

この場合分けが、実は見かけによらず面倒なのですが、次のようになります。

3-1 $b \neq 0$ のとき、(1) 第 1 式の両辺に $\frac{1}{b}$ をかけると、

$$\begin{cases} y = \frac{p}{b} \\ dy = q \end{cases}$$

(3') 第 2 式に第 1 式の $-d$ 倍を足すと、

$$\begin{cases} y = \frac{p}{b} \\ (0 \cdot y) = \frac{bq - dp}{b} \end{cases}$$

3-1-1 $bq - dp \neq 0$ ならば解なし。

3-1-2 $bq - dp = 0$ ならば解は $y = \frac{p}{b}$ ですが、 x が何でもよいので x, y の組としては無限個。

3-2 $b = 0$ かつ $d \neq 0$ のとき、(2) 第 1 式と第 2 式を入れ替えると、

$$\begin{cases} dy = q \\ (0 \cdot y) = p \end{cases}$$

(1) 第 1 式の両辺に $\frac{1}{d}$ をかけると、

$$\begin{cases} y = \frac{q}{d} \\ (0 \cdot y) = p \end{cases}$$

3-2-1 $p \neq 0$ ならば解なし。

3-2-2 $p = 0$ ならば解は $y = \frac{q}{d}$ ですが、 x が何でもよいので x, y の組としては無限個。

3-3 $b = d = 0$ のとき、何の制約も無いので、解は任意の x, y で無限個の組。

となります。以上まとめると…

$$\boxed{1-1} \quad a \neq 0, ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} x &= \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ y &= \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{cases}$$

$$\boxed{2-1} \quad a = 0, c \neq 0, b \neq 0$$

$$\begin{cases} x &= \frac{bq-dp}{bc} \\ y &= \frac{p}{b} \end{cases}$$

$$\boxed{1-2-1} \quad a \neq 0, ad - bc = 0, aq - cp \neq 0$$

$$\boxed{2-2-1} \quad a = 0, c \neq 0, b = 0, p \neq 0$$

$$\boxed{3-1-1} \quad a = c = 0, b \neq 0, bq - dp \neq 0$$

$$\boxed{3-2-1} \quad a = c = 0, b = 0, d \neq 0, p \neq 0$$

解無し。

$$\boxed{1-2-2} \quad a \neq 0, ad - bc = 0, aq - cp = 0$$

解は $ax + by = p$ を満たす x, y の組全て。

$$\boxed{3-1-2} \quad a = c = 0, b \neq 0, bq - dp = 0$$

$y = \frac{p}{b}$ で、 x は何でもよい。

$$\boxed{2-2-2} \quad a = 0, c \neq 0, b = 0, p = 0$$

解は $cx + dy = q$ を満たす x, y の組全て。

$$\boxed{3-2-2} \quad a = c = 0, b = 0, d \neq 0, p = 0$$

$y = \frac{q}{d}$ で、 x は何でもよい。

$$\boxed{3-3} \quad a = c = 0, b = d = 0$$

x, y は何でもよい。

となりますが、場合分けが多すぎるので整理すると…

$$\boxed{1-1}, \boxed{2-1} \quad ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} x &= \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ y &= \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{cases}$$

$$\boxed{1-2-1}, \boxed{2-2-1} \quad ad - bc = 0, aq - cp \neq 0$$

$$\boxed{3-1-1}, \boxed{3-2-1} \quad ad - bc = 0, bq - dp \neq 0$$

解無し。

$$\boxed{1-2-2} \quad ad - bc = 0, aq - cp = 0, a \neq 0$$

$$\boxed{3-1-2} \quad ad - bc = 0, bq - dp = 0, b \neq 0$$

解は $ax + by = p$ を満たす x, y の組全て。

$$\boxed{2-2-2} \quad ad - bc = 0, \quad aq - cp = 0, \quad c \neq 0$$

$$\boxed{3-2-2} \quad ad - bc = 0, \quad bq - dp = 0, \quad d \neq 0$$

解は $cx + dy = q$ を満たす x, y の組全て。

$$\boxed{3-3} \quad a = b = c = d = 0$$

x, y は何でもよい。

となります。(条件を整理する際、場合分けを組み替えたため、番号は完全には対応していません。)

これから、3本の2次式

$$ad - bc, \quad aq - cp, \quad bq - dp$$

が、解の個数の判定において重要であることが見てとれます。

ここで、 $ad - bc = 0$ のとき、 $a \neq 0$ ならば $d = \frac{b}{a} \cdot c$ より、

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{b}{a} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{b}{a} \mathbf{a}_1$$

が成り立ち、 A の第 2 列 $\mathbf{a}_2$ は第 1 列 $\mathbf{a}_1$ と平行 (0 の場合を含む) となっています。 $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ いずれの場合も同様です。この場合、 A の 2 個の列ベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ は平行四辺形を作れません。

同様に、 $aq - cp = 0$ のとき、 $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}$ が、 $bq - dp = 0$ のとき、 $\mathbf{a}_2$ と $\mathbf{b}$ が、それぞれ平行になっており、前回の考察と符合しています。

ここまで、内容的には中学校？と思われるかも知れませんが、あくまでも一般の場合 (n 個の変数 m 本の式) を考えるためのモデルケースです。次回は、この過程を線形代数の言葉に読み替える作業を行います。

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

の係数が、 $a_{11} \neq 0$ かつ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ を満たすとします。今回の講義資料に倣って、加減法だけで、

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = \alpha \\ x_2 + a'_{23}x_3 = \beta \\ a'_{33}x_3 = \gamma \end{cases}$$

の形まで変形してみましょう。

このとき、 x_3 がただ一つに決まるための条件は何でしょうか？

第3回練習課題の解答

(1) x と Ax の中点が、直線 $y = \tan \frac{\theta}{2} \cdot x$ 上にあること。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x + Ax) &= \frac{1}{2}(E + A)x \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x(1 + \cos \theta) + y \sin \theta \\ x \sin \theta + y(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + y \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ x \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + y \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $A\mathbf{x} - \mathbf{x}$ が、直線 $y = \tan \frac{\theta}{2} \cdot x$ と直交すること。

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} - \mathbf{x} &= (A - E)\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta \\ x \sin \theta + y(-\cos \theta - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ x \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - y \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} -\tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$