

線形代数1・講義資料

第5回

(2023年5月26日(金)講義分)

第5回本題

前回、この講義資料で見た加減法による解き方を、行列(とベクトル)を用いて簡潔に記述することを考えてみましょう。実はそれこそが、教科書 §4~5 で説明されている、行列の**基本変形**(**行変形**)を用いた**掃き出し法**による連立方程式の解法なのです。

具体的に見てみると…

前同様に、まず

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおき、連立方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表します。

ここで、行列 A の右に $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとして追加した行列を**拡大係数行列**と呼び $(A \ \boldsymbol{b})$ または $(A \mid \boldsymbol{b})$ と表します。成分まできちんと書くと次の通りです。

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array} \right)$$

ここで、連立方程式を解く過程で現れた条件式を、拡大係数行列を用いて表し直してみると次のようになります。

例えば場合分け 2-1 $a = 0, c \neq 0, b \neq 0$ なら、

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & p \\ c & d & q \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第1行と第2行を入れ替え}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & d & q \\ 0 & b & p \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第1行に } \frac{1}{c} \text{ をかける}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{d}{c} & \frac{q}{c} \\ 0 & b & p \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第2行に } \frac{1}{b} \text{ をかける}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{d}{c} & \frac{q}{c} \\ 0 & 1 & \frac{p}{b} \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第1行に第2行の } -\frac{d}{c} \text{ 倍を足す}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{bq-dp}{bc} \\ 0 & 1 & \frac{p}{b} \end{array} \right) \quad \text{解}$$

このように無事に解けたときは、拡大係数行列の左側が単位行列 E になっています。

次に 1-2 $a \neq 0, ad - bc = 0$ のとき。

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第1行に } \frac{1}{a} \text{ をかける}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{p}{a} \\ c & d & q \end{array} \right) \quad \downarrow \text{第2行に第1行の } -c \text{ 倍を足す}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{p}{a} \\ 0 & 0 & \frac{aq - cp}{a} \end{array} \right) \quad \text{解?}$$

このように解無しまたは無限個になるときは、拡大係数行列の左側が単位行列 E にならず、 $(2, 1)$ 成分と $(2, 2)$ 成分が 0 になってしまいます。 $(2, 3)$ 成分が 0 でなければ解無し、 $(2, 3)$ 成分が 0 ならば解は無限個です。

加減法として用いた式変形を、拡大係数行列に施した変形として見ると、次のようになります。

- (1) 第 1 行に 0 でない実数をかける。
- (1') 第 2 行に 0 でない実数をかける。
- (2) 第 1 行と第 2 行を入れ替える。
- (3) 第 1 行に第 2 行の実数倍を足す。
- (3') 第 2 行に第 1 行の実数倍を足す。

これを行列の**基本変形**と呼びます。これは行に対して施すものなので**行変形**と言います。行を列に入れ替えた基本変形は**列変形**と言います。

連立方程式を解く際、列変形は未知変数 x, y を、他の変数と取り替える操作を意味するので、通常は使わない方が無難です。

ここまで、変数 2 個で 2 本の連立方程式について見てきましたが、一般に変数 n 個で m 本の連立方程式の場合にも、(既にお話しましたように、) $m \times n$ 行列 A と n 次元ベクトル x , m 次元ベクトル b を用いて $Ax = b$ と表すとき、拡大係数行列 $(A \mid b)$ に基本変形(行変形)を施すことにより、加減法によって解く過程を、簡潔に記述することができます。

この場合の基本変形は、

- (1) ある行に 0 でない実数をかける。
- (2) 二つの行を入れ替える。
- (3) ある行に他の行の実数倍を足す。

となります。

変形の目標は、各行ごとに、左から順に見て最初に 0 にならない成分が、左上から右下へ、階段状に並んだ状態です。

このような行列を**階段行列**と言います(教科書 §4 の38頁参照)。行変形によって得られた階段行列の 0 ベクトルでない行の個数をその行列の**階数**と言い、 $\text{rank } A$ のように表します。定義から $\text{rank } A \leq m$ かつ $\text{rank } A \leq n$ が自動的に成り立ちます。

教科書 §4 では、行変形と列変形の両方を用いての、行列を縦横 4 個に分割した際、左上に単位行列、他は零行列となる**階数標準形**

$$\left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

への変形も紹介されていますが、これは行の個数も列の個数も共通で、さらに階数も同じである行列どうしが、基本変形でたどり着ける共通の標準形として紹介されているもので、連立方程式を解くときは、上にも書いた理由から、使いません。

さて、拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ を行変形で階段行列まで変形したとき、その第 1 列から第 n 列まで見て(つまり右端の第 $n + 1$ 列を取り除いて) 段数を数えた階数が、ちょうど行列 A の階数 $\text{rank } A$ になっており、第 $n + 1$ 列まで全部見て段数を数えた段数が、拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ 自身の階数 $\text{rank } (A \mid \boldsymbol{b})$ になっています。

連立方程式が解を持つための必要十分条件は、基本変形で左辺が 0 になってしまったとき、右辺も同時に 0 になることでしたから、階数の言葉で言い換えれば、 $\text{rank } A = \text{rank } (A \mid \boldsymbol{b})$ のとき解を持ち、 $\text{rank } A \neq \text{rank } (A \mid \boldsymbol{b})$ のとき解を持たない となります (教科書 43 頁参照)。

特に $m = n$ のとき、すなわち変数の個数と式の本数が等しい場合、もし最終的に拡大係数行列の左側が単位行列 E になると、 $\text{rank } A = \text{rank } (A \mid \mathbf{b}) = n$ により、解を持つだけでなく、ただ一組と言うことになります。

行列の階数については、線形代数2で詳しく扱う予定で、この講義では、これ以上深入りはせず、今後は主として、 $m = n$ でただ一組の解を持つ場合について、調べて行くことになりますが、これまでに出来た解が無限個の場合については、ここでもう少しだけ補足しておこうと思います。

前回整理した、2元連立一次方程式の解の内、 $\boxed{1-2-2}$ (, $\boxed{3-1-2}$)では、 $ax + by = p$ を満たす x, y の組全てが解でしたが、このままでは方程式のままで、まるで解いた気がしないと思う人も多いのではないのでしょうか？これは、解が無限個あるため、解全体の集合として表さなければならないため、ある意味仕方の無いことなのですが、それでも、いかにも解いた感じに解を表したいときは解全体の集合を**パラメーター表示**(**媒介変数表示**) するという方法があります。

今、 $ax + by = p$ を満たす x, y の組を、座標平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の集合と考えると、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を法ベクトルとする直線です。

従って、この法ベクトルと直交するベクトル $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとして取ることができます。

1-2-2では、 $a \neq 0$ を仮定しているので、 $x = -\frac{b}{a}y + \frac{p}{a}$ ですから、たとえば $y = 0$ を代入してみると、 $-\frac{b}{a} \cdot 0 + \frac{p}{a} = \frac{p}{a}$ より、この直線は点 $\begin{pmatrix} \frac{p}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ を通ることがわかります。従って、この直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

とパラメーター表示されます。連立方程式の解としては、

$$\begin{cases} x = \frac{p}{a} - tb \\ y = ta \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

です。

ただし、この表示は一通りではありません。たとえば $y = 0$ の代わりに $y = a$ を代入すると、 $-\frac{b}{a} \cdot a + \frac{p}{a} = \frac{p}{a} - b$ より、この直線は点 $\begin{pmatrix} \frac{p}{a} - b \\ a \end{pmatrix}$ を通ることがわかるので、この直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{a} - b \\ a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R})$$

ともパラメーター表示されます。連立方程式の解としては、

$$\begin{cases} x = \frac{p}{a} - b - sb \\ y = a + sa \end{cases} \quad (s \in \mathbf{R})$$

です。

これら二つの表示は、パラメーターの変換 $t = s + 1$ で写り合いますから、そのような表示どうしを同じ表示と見なせば、一通りです。

このような表示も、行列とベクトルを用いた連立方程式の表示方 $Ax = b$ に沿って理解することができます。そのためにまず注目すべきなのは、幾通りも (実際には無限通りに) 取れる上の表示の、点の取り方によらない次の部分です。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

または、

$$\begin{cases} x = -tb \\ y = ta \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

これも方向ベクトルの取り方にはよるのですが、それは一まずおくとして、この表示が何を表しているのかと言うと、 $ax + by = 0$, すなわち、原点を通り直線 $ax + by = p$ に平行な直線です。

つまり、この部分は $Ax = 0$ の解を表していると言えます。

一般に(つまり $m = n = 2$ に限らず、また $m = n$, $m \neq n$ のどちらでも) $Ax = 0$ を **斉次方程式**(または**同次方程式**) と言い、一方 $b \neq 0$ のとき $Ax = b$ を **非斉次方程式**(または**非同次方程式**) と言います(教科書46頁参照)。

今、非斉次方程式 $Ax = b$ の任意の二つの解 x_1, x_2 に対し、これらは $Ax_1 = b, Ax_2 = b$ を満たしますから、

$$A(x_2 - x_1) = Ax_2 - Ax_1 = b - b = 0$$

より、 $x = x_2 - x_1$ は、斉次方程式 $Ax = 0$ の解になります。

逆に、非斉次方程式 $Ax = b$ の任意の解 x_1 と斉次方程式 $Ax = 0$ の任意の解 x_0 に対し、これらは $Ax_1 = b, Ax_0 = 0$ を満たしますから、

$$A(x_1 + x_0) = Ax_1 + Ax_0 = b + 0 = b$$

より、 $x = x_1 + x_0$ は、非斉次方程式 $Ax = b$ の解になります。

このことを公式として、次のように表します。

$$\text{“}Ax = b\text{” の一般解} = \text{“}Ax = b\text{” の特殊解} + \text{“}Ax = 0\text{” の一般解}$$

ここで**特殊解**とは特別な性質を持つ解と言う意味ではなく、この公式の意味をかみ砕いて言うと、「 $Ax = b$ の解を全て見つけたければ、 $Ax = b$ の解を**何でもよいので一つ見つけて**、一方 $Ax = 0$ の解は全て見つけて、足し合わせればよい」と言うことになります。

上の例で言うと、直線 $ax + by = p$ 上の任意の点の座標(または位置ベクトル)は、直線 $ax + by = p$ 上の点をどの点でもよいので一つ見つけて、その座標(または位置ベクトル)に、直線 $ax + by = 0$ 上の点の座標(または位置ベクトル)を足し合わせることで得られると言うことになります。

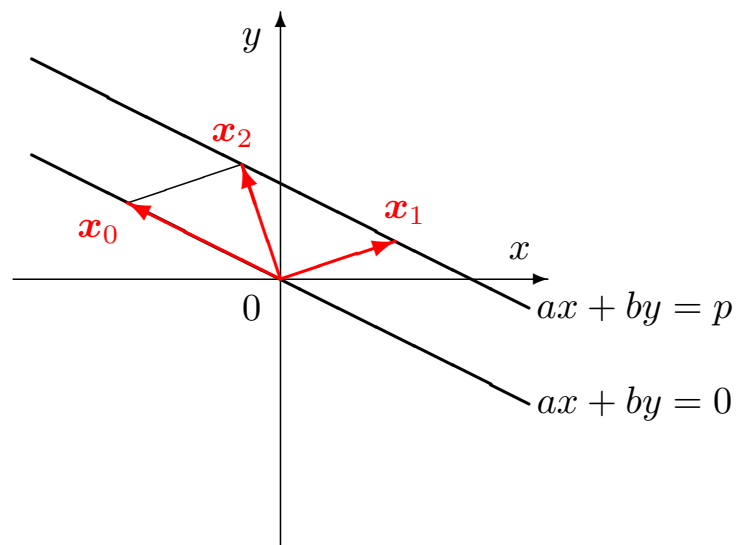
従って、 $Ax = b$ の一般解は、 $Ax = b$ の特殊解

$$\begin{pmatrix} \frac{p}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と、 $Ax = 0$ の一般解

$$t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

の和として表されるのです。



$\text{rank } A = n$ のとき、斉次方程式 $Ax = 0$ は自明な解 $x = 0$ しか持ちませんが(教科書46頁参照)、 $\text{rank } A < n$ のときは無限個の解を持つので、非斉次方程式 $Ax = b$ を解く場合にも、斉次方程式 $Ax = 0$ を完全に解くことが、重要な意味を持ちます。そこで行列の階数が重要な役割を果たすことになるのですが、きちんと理解するにはベクトル空間に関する準備が必要なので、詳しいお話は、後期の線形代数2で、ということになります。

14頁で一まずおいておいた「方向ベクトルの取り方にはよる」ということも、斉次方程式の解がなすベクトル空間の基底の変換によって説明されます。

第4回練習課題の解答

問題の3元連立1次方程式は、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

で、 $a_{11} \neq 0$ かつ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ を満たすものでした。

(1) 第1式の両辺に $\frac{1}{a_{11}}$ をかけると、

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(3) 第 2 式に第 1 式の $-a_{21}$ 倍を足すと、

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ (0 \cdot x_1 +) \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

(3) 第 3 式に第 1 式の $-a_{31}$ 倍を足すと、

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{b_1}{a_{11}} \\ (0 \cdot x_1 +) \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}} \\ (0 \cdot x_1 +) \frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{11}}x_3 & = & \frac{a_{11}b_3 - a_{31}b_1}{a_{11}} \end{array} \right.$$

(1) 第 2 式の両辺に $\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ をかけると、

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ (0 \cdot x_1 +) x_2 + \frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}x_3 = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ (0 \cdot x_1 +) \frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{11}b_3-a_{31}b_1}{a_{11}} \end{array} \right.$$

(3) 第 3 式に第 2 式の $-\frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}}$ 倍を足すと、

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ (0 \cdot x_1 +) x_2 + \frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}x_3 = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ (0 \cdot x_1 + \quad 0 \cdot x_2 +) \frac{(*1)}{a_{11}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}x_3 = \frac{(*2)}{a_{11}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} \end{array} \right.$$

ここで、

$$\begin{aligned}(*1) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\(*2) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}b_3 - a_{31}b_1) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \\ &= a_{11}\{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})b_1 + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})b_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3\}\end{aligned}$$

より、第3式左辺の x_3 の係数は、

$$\frac{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

x_3 がただ一つに決まるための条件は、分子の3次式が0でないことです。

この 3 次式が 0 のとき、第 3 式右辺

$$\frac{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})b_1 + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})b_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})b_3}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

が 0 でなければ解無し。一方 0 ならば解は無限個です。

式 2 本の 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = \alpha \\ x_2 + a'_{23}x_3 = \beta \end{cases}$$

の解を、非斉次方程式の特殊解と斉次方程式の一般解の和の形で表してみましょう。