線形代数1・講義資料

第6回

(2023年6月2日(金)講義分)

第6回本題

この講義では前回までに、一般に変数 n 個で m 本の連立方程式を、 $m \times n$ 行列 A と n 次元ベクトル x , m 次元ベクトル b を用いて $Ax = b$ と表すとき、拡大係数行列 $(A | b)$ に基本変形(行変形)を施すことにより、加減法によって解く過程を簡潔に記述することができるということを学びました。

特に $m = n$ のとき、すなわち変数の個数と式の本数が等しい場合には、最終的に拡大係数行列の左側が単位行列 E になると、ただ一組の解を持ちました。

今、各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対し、方程式 $Ax = e_j$ が、解 c_j を持つと仮定します。これは、写像 $y = Ax$ により、 e_j に写るような $x = c_j$ が存在することを意味しています。

ここで、任意の $\mathbf{b}$ に対して、

$$\mathbf{x} = b_1 \mathbf{c}_1 + b_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + b_n \mathbf{c}_n$$

とおきます。 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ を列ベクトルとする n 次正方行列を C とおくと、 $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ です。このとき、

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(C\mathbf{b}) = A(b_1 \mathbf{c}_1 + b_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + b_n \mathbf{c}_n) \\ &= b_1 A\mathbf{c}_1 + b_2 A\mathbf{c}_2 + \cdots + b_n A\mathbf{c}_n \\ &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + b_n \mathbf{e}_n \\ &= E\mathbf{b} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

が成り立ち、 $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ が、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることがわかります。

行列 C について見てみると、

$$\begin{aligned} AC &= A(\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n) \\ &= (A\mathbf{c}_1 \ A\mathbf{c}_2 \ \cdots \ A\mathbf{c}_n) \\ &= (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) \\ &= E \end{aligned}$$

を満たします。この行列 C の第 j 列 $\mathbf{c}_j$ は、拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{e}_j)$ の基本変形(行変形)によって $(E \mid \mathbf{c}_j)$ の形で求められますから、この計算を一まとめにして、 n 列付け加えて拡大した行列 $(A \mid \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) = (A \mid E)$ に同じ基本変形を施すことによって $(E \mid \mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n) = (E \mid C)$ の形で求めることができます。

実は、この行列 C は $AC = E$ だけでなく $CA = E$ も満たします。(このことは後で示します。) この意味で、行列 C を行列 A の**逆行列**と呼び、 A^{-1} と表します。また、逆行列を持つような行列を**正則行列**と呼びます。

教科書56頁にもあるように、次が成り立ちます。

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}), \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

特に3番目の公式で $B = A$ ととれば、

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

が得られます。

行列の積に関する結合律を繰り返し用いると、任意の自然数 n に対しても、 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ が成り立ち、さらにより一般に

$$A^n(A^{-1})^m = \begin{cases} A^{n-m} & (n > m) \\ E & (n = m) \\ (A^{-1})^{m-n} & (n < m) \end{cases}$$

も成り立ちます。このことから、任意の自然数 n に対し、 $(A^{-1})^n = A^{-n}$ と表し、行列の負のべき乗と見なします。

この場合 $A^0 = E$ と考えるのが自然です。

$n = 2$ のとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し、 $Ax = e_1$, $Ax = e_2$ の解は、 $ad - bc \neq 0$ のときに限り、それぞれ

$$c_1 = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

で、同時に与えられ、

$$C = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となります。

この C が $CA = E$ を満たすことは、直接計算で確かめられますから、 A の逆行列 A^{-1} が、この公式で与えられることがわかります(教科書52頁参照)。

特に第2回でお話した2次の直交行列の逆行列は、回転を表す場合は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で、もちろん原点中心の**右回り** θ 回転を表す行列になります。

一方、線対称移動を表す場合は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で、自分自身に一致してしまいます。これは同じ線対称移動を2回施せば元に戻るためです。

このことは、この行列を A で表すと、 $A^2 = E$ を満たすことでも確かめられます。

また、対角成分が 0 でないような 2 次の対角行列の逆行列は、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} a_{22} & -0 \\ -0 & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

で与えられます。(n 次の対角行列でも同様なことは、直接計算で簡単に確かめられます。)

対角成分が 0 でない 2 次の上三角行列も逆行列を持ちます(これも実は n 次でも同様です)が、特に対角成分が全て 1 のときは、次で与えられます。

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - a_{12} \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \geq 3$ 一般の場合についても、個別の行列について基本変形を施すのではなく、直接逆行列を求める公式があります。ただ、それには少なからず準備が必要で、その準備を経て公式を導くのが §7 以降の課題です。

今回は、公式にも基本変形にもよらずに、逆行列が得られる特別な場合をいくつかご紹介しておきましょう。

$(n + m)$ 次以上の正方行列で次のように 4 個の行列 (E_n は n 次、 E_m は m 次の単位行列) に分割されるものについて考えてみましょう。

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & A_{12} \\ \hline O & E_m \end{array} \right)$$

$n = m = 1$ なら、既に挙げた上三角行列です。その逆行列にならうと、逆行列の候補は

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & -A_{12} \\ \hline O & E_m \end{array} \right)$$

ということになります。

実際に積をとってみれば、その見当が正しいことが確かめられます。

何乗かすると零行列 O になってしまうような正方行列を**べき零行列**と言います(教科書18頁参照)。 n 次正方行列 A がべき零行列ならば、実は遅くとも n 乗目には O になることがわかります。

対角成分が全て 0 であるような上三角行列

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2\ n-1} & a_{n-2\ n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は、べき零行列です。教科書19,20頁に $n = 2, 3$ の場合の例題があります。下三角行列についても、同様の主張が成り立ちます。

$n = 4$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、 A^2, A^3, A^4 を計算してみましょう。

2 次正方行列では、任意の a, b に対し、次のような行列がべき零になります。

$$\pm \begin{pmatrix} -ab & -b^2 \\ a^2 & ab \end{pmatrix}$$

一般に、どのような行列がべき零になるかは、線形代数2で扱う固有値が関係しています。

先にお話しましたように、 A が正則行列ならば、 $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ が成り立ちますから、 $A^n = O$ であるようなべき零行列 A 自身は正則でない、つまり逆行列を持ちません。

しかし、このべき零行列を用いた次のような逆行列の公式が、教科書57頁に問題として出ています。(教科書が未読の人は、先に教科書を読んで下さい。)

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = E - A^n = E - O = E$$

つまり、

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

です。 $m < n$ であるような m に対して $A^m = O$ ならば、もちろん、もっと短くなります(そうは見えませんが)。

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$$

先に例として挙げた上三角行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せますが、ここで右辺第2項の行列は、2乗すれば零行列になるべき零行列ですから、この公式の $n = 2$ の場合になっていて、 $(E - A)(E + A) = E$ より、逆行列は $(E - A)^{-1} = E + A$ により与えられるわけです。

その後の行列の分割の例も全く同様です。

次に、かなり特別な例ですが、次の n 次正方行列を考えてみましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列は実は $A^n = E$ を満たすことが、個別の n については、直接計算で確かめられます。(一般の n については、一応証明が必要です。) 従って、 $A^{-1} = A^{n-1}$ です。

この行列は、実は n 次の直交行列の特別な例になっているのですが、一般に、 $A^m = E$ ($m = n$ とは限らない) を満たす A に対し、 $A^{-1} = A^{m-1}$ が成り立ちます。

$n = 4$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、 A^2, A^3, A^4 を計算してみましょう。

第5回練習課題の解答

問題の3元連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = \alpha \\ x_2 + a'_{23}x_3 = \beta \end{cases}$$

に、たとえば $x_3 = 0$ を代入してみると、

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 = \alpha \\ x_2 = \beta \end{cases}$$

より、 $x_2 = \beta$, $x_1 = \alpha - a'_{12}\beta$ となり、特殊解として

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha - a'_{12}\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれます。

一方、齊次方程式

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = 0 \\ x_2 + a'_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

については、 $x_2 = -a'_{23}x_3$, $x_1 = -a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 = (a'_{12}a'_{23} - a'_{13})x_3$ より、 $x_3 = t$ とおいてパラメーターとすれば、一般解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} a'_{12}a'_{23} - a'_{13} \\ -a'_{23} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

よって、求める非齊次方程式の一般解は、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha - a'_{12}\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a'_{12}a'_{23} - a'_{13} \\ -a'_{23} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$