線形代数1・講義資料

$\boxed{\text{演習第２回}}$

(2023年6月9日(金)講義分)

$\boxed{\text{問題 1}}$ （$\boxed{}$に当てはまる数を解答して下さい。）

行列 A の階数(基本変形で得られる階段行列の段数) を $\mathrm{rank}\ A$ で表すとき、

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{ア} \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{イ}$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{ウ} \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{エ}$$

が成り立ちます。

$\boxed{\text{問題２}}$ （$\boxed{}$に当てはまる数を解答して下さい。）

　連立方程式

$$
\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - x_3 \ = \ 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ = \ 0 \end{cases} \tag{2.1}
$$

の一般解を、非斉次方程式の特殊解と斉次方程式の一般解の和の形で表してみましょう。

　まず、非斉次方程式 (2.1) の特殊解として、例えば

$$
\begin{cases} x_1 \ = \ \boxed{\text{オ}} \\ x_2 \ = \ \boxed{\text{カ}} \\ x_3 \ = \ \boxed{\text{キ}} \end{cases}
$$

がとれます。

一方、斉次方程式

$$
\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \tag{2.2}
$$

の自明でない(全てが 0 ではない)解として、例えば

$$
\begin{cases} x_1 &= \boxed{\text{ク}} \\ x_2 &= \boxed{\text{ケ}} \\ x_3 &= \boxed{\text{コ}} \end{cases}
$$

がとれます。このとき (2.2) の一般解は

$$
\begin{cases} x_1 &= \boxed{\text{ク}}\, t \\ x_2 &= \boxed{\text{ケ}}\, t \\ x_3 &= \boxed{\text{コ}}\, t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})
$$

と表されます。

よって、(2.1) の一般解は

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{ク}}\, t \\ x_2 = \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{ケ}}\, t \\ x_3 = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{コ}}\, t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

$\boxed{\text{問題３}}$ （$\boxed{}$に当てはまる数または式を解答して下さい。）

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列 A^{-1} を、掃き出し法(拡大係数行列 $(A \mid E)$ の行変形) によって求めてみましょう。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

↓(i) 第$\boxed{サ}$行と第$\boxed{シ}$行を入れ替える。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

↓(ii) 第$\boxed{ス}$行に第$\boxed{セ}$行の$\boxed{ソ}$倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \color{red}{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{タ} \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

↓(iii) 第$\boxed{チ}$行に第$\boxed{ツ}$行の$\boxed{テ}$倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{\text{タ}} \\ 0 & b & 1 & 1 & 0 & \boxed{\text{ト}} \end{array}\right)$$

↓ (iv) 第$\boxed{\text{ナ}}$行に第$\boxed{\text{ニ}}$行の$\boxed{\text{ヌ}}$倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{\text{タ}} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{\text{ネ}} & \boxed{\text{ノ}} \end{array}\right)$$

より、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{\text{タ}} \\ 1 & \boxed{\text{ネ}} & \boxed{\text{ノ}} \end{pmatrix}$$

です。