線形代数1・講義資料

$\boxed{\text{第 7 回}}$

(2023年6月16日(金)講義分)

$\boxed{\text{第 7 回本題}}$

今回は、n 次正方行列が正則であるための条件や、逆行列を与える式を記述するのに必要な、置換についてのお話です。この講義全体を通して、最も抽象的でわかりにくい所かもしれませんので、あえて教科書とほぼ重複する内容について、詳しくお話しておくことにします。

1 から n までの自然数の集合を $\mathbf{N}_n$ で表すことにします。$\mathbf{N}_n$ から自分自身への一対一写像を n 次の置換(教科書61頁では n 文字の置換) と言います。n 次の置換全体の集合を S_n と表します。

n 次の置換

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{N}_n &\to \mathbf{N}_n \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

に対し、その像を順に

$$\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$$

とならべたものは、1 から n までの自然数の並べ替えとして得られる順列に他なりませんから、その総数(S_n の元の個数)は

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

です。

n 次の置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と表します。

この表記は $2\times n$ 行列と紛らわしいのですが、これも慣例となっているので仕方ありません。

n 次の置換の内、何も入れ替えない置換を恒等置換(教科書63頁参照)、一対だけ入れ替える置換を互換(同66頁)、(r 個の元からなる) $\mathbf{N}_n$ の部分集合の元をちょうど一周するように順に写す置換を巡回置換(同65頁) とそれぞれ言います。互換は 2 個の元の巡回置換と言えます。

恒等置換を ε で、2 元 k_1 と k_2 を入れ替える互換を $(k_1\ k_2)$ で、それぞれ表します。互換 $(k_1\ k_2)$ は、$(k_2\ k_1)$ と書いても同じ意味です。

r 個の元 $k_1, k_2, \ldots, k_r$ を

$$k_1 \mapsto k_2 \mapsto \cdots \mapsto k_r \mapsto k_1$$

の順に写す巡回置換を

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$$

で表します。どれから始めても一周するので、同じ巡回置換で r 通りの表し方があります。例えば $r = 3$ なら

$$(k_1\ k_2\ k_3) \ = \ (k_2\ k_3\ k_1) \ = \ (k_3\ k_1\ k_2)$$

です。

この表記も、ベクトルと紛らわしい上に、何次の置換かも表記だけではわからないのですが、状況から判断することになります。

2 次の置換は

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3 次の置換は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (1\ 2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ (1\ 2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ (1\ 3\ 2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (1\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ここまで教科書69頁)

4 次の置換は

$$
\begin{array}{llllll}
\varepsilon & & & & & \\
(1\ 2) & (1\ 3) & (1\ 4) & (2\ 3) & (2\ 4) & (3\ 4) \\
(1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) & & (1\ 2\ 4) & (1\ 4\ 2) & \\
(1\ 3\ 4) & (1\ 4\ 3) & & (2\ 3\ 4) & (2\ 4\ 3) & \\
(1\ 2\ 3\ 4) & (1\ 2\ 4\ 3) & (1\ 3\ 2\ 4) & (1\ 3\ 4\ 2) & (1\ 4\ 2\ 3) & (1\ 4\ 3\ 2) \\
(1\ 2)(3\ 4) & (1\ 3)(2\ 4) & (1\ 4)(2\ 3) & & &
\end{array}
$$

です。ここで置換の積 $(1\ 2)(3\ 4)$ は写像としての合成を意味しますが、$\circ$ は省略して表します(教科書63頁参照)。たとえば

$$
(1\ 2)(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

です。

置換の積は写像としての合成と言うことは、一般に、結合律 $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$ は満たしますから、かっこは付けずに$\sigma\tau\rho$ とも表します(教科書63〜64頁参照)。一方、交換律$\sigma\tau = \tau\sigma$ は満たしません(これは、いつでも成り立つとは限らないと言う意味で、メンバーの被らない置換どうしなら、交換しても問題ありません)。

同じ置換を m 回繰り返した置換はσ^m で表します。$\sigma^2 = \sigma\sigma$, $\sigma^3 = \sigma\sigma\sigma$, $\ldots$ と言った感じです。

任意の置換 σ は、自分自身への一対一写像なので、逆写像を持ちます。これを σ の逆置換と呼び、σ^{-1} と表します。定義を式で表すと、$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$ となります(教科書64頁参照)。

　恒等置換の逆置換は恒等置換自身($\varepsilon^{-1}=\varepsilon$)です。また、互換と自分自身の積は恒等置換、つまり$\sigma^2=\sigma\sigma=\varepsilon$ (同じ一対を２回入れ替えると元に戻る) なので、互換は自分自身の逆置換 ($\sigma^{-1}=\sigma$) です。

　3 次の置換では、巡回置換$(1\ 2\ 3)$ と $(1\ 3\ 2)$ が、お互いの逆置換になっています。

$$\begin{array}{ccc|ccc} & (1\ 2\ 3) & & & (1\ 3\ 2) & \\ 1 & \mapsto & 2 & 2 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 3 & 3 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 & 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

　上に列挙した4 次の各置換について、どれとどれが逆置換になっているか、調べてみましょう。

一般に、任意の置換は、メンバーの被らない巡回置換たち(互換を含みます)の積として表せます。たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 3)(2\ 4)$$

と言ったようにですが、さらに、各巡回置換は互換の積として表せます。たとえば、$(1\ 5\ 3)$ は

$$\begin{array}{ccc|ccccc} & (1\ 5\ 3) & & & (1\ 5) & & (1\ 3) & \\ 1 & \mapsto & 5 & 1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 2 & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 4 & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \\ 5 & \mapsto & 3 & 5 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

より $(1\ 5\ 3) = (1\ 3)(1\ 5)$ です。写像の合成なので右を先に考えることに注意しましょう。

結果、元の置換も次のように互換の積で表せます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 3)(1\ 5)(2\ 4)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & (2\ 4) & & (1\ 5) & & (1\ 3) & \\ 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

ここで、メンバーの被らない $(2\ 4)$ は、どこに入れても構わないので、$(1\ 3)(2\ 4)(1\ 5)$ や $(2\ 4)(1\ 3)(1\ 5)$ も、同じ置換になります。

$$\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
 & (1\ 5) & & (2\ 4) & & (1\ 3) & & & (1\ 5) & & (1\ 3) & & (2\ 4) & \\
1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & 1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\
2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 4 \\
3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\
4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 2 \\
5 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & 5 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3
\end{array}$$

これらの表し方を、同じ表し方と考えたとしても、置換を互換の積として表す表し方は１通りではありません。

巡回置換 $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4)$ を、それぞれ互換の積として２通り以上に表してみましょう。

偶(奇)数個の互換の積で表される置換を偶(奇)置換と呼びます(教科書68頁参照)。置換を互換の積で表すとき、(表し方は１通りではありませんが、) 互換が偶数個か奇数個かは、それぞれの置換で変わらないので、偶置換か奇置換かは判定できます。恒等置換は偶置換、互換は奇置換、奇(偶)数個の元の巡回置換は偶(奇)置換です。

たとえば、$(1\ 5\ 3)$ は $(1\ 3)(1\ 5)$ なので偶置換、$(1\ 5\ 3)(2\ 4)$ は $(1\ 3)(1\ 5)(2\ 4)$ なので奇置換です。

写像の合成が逆写像については順序が逆になること ($(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$) と、互換の逆置換は自分自身と言うことを併せれば、例えば、

$$
\begin{aligned}
(1\ 5\ 3)^{-1} &= \{(1\ 3)(1\ 5)\}^{-1} \\
&= (1\ 5)^{-1}(1\ 3)^{-1} \\
&= (1\ 5)(1\ 3) \\
\{(1\ 5\ 3)(2\ 4)\}^{-1} &= \{(1\ 3)(1\ 5)(2\ 4)\}^{-1} \\
&= (2\ 4)^{-1}(1\ 5)^{-1}(1\ 3)^{-1} \\
&= (2\ 4)(1\ 5)(1\ 3)
\end{aligned}
$$

のように、互換の順序を逆にすれば、逆置換が得られることがわかります。従って、特に偶(奇)置換の逆置換はやはり偶(奇)置換になります。

n 次の偶置換全体の集合を A_n と表します。偶(奇)置換と互換の積は奇(偶)置換なので、偶置換と奇置換の個数は各 n 毎に同じですから、A_n の元の個数は $\dfrac{n!}{2}$ $(n \geq 2)$ です。

任意の置換 σ に対して、その符号を

$$\mathrm{sgn}\ \sigma = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ は偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ は奇置換}) \end{cases}$$

により定義します(教科書66頁参照)。

一般に、

$$\mathrm{sgn}\ (\sigma\tau) = (\mathrm{sgn}\ \sigma)(\mathrm{sgn}\ \tau)$$

が成り立ちます。

$$1 = \mathrm{sgn}\ \varepsilon = \mathrm{sgn}\ (\sigma\sigma^{-1}) = (\mathrm{sgn}\ \sigma)(\mathrm{sgn}\ \sigma^{-1})$$

より

$$\mathrm{sgn}\ \sigma^{-1} = \frac{1}{\mathrm{sgn}\ \sigma}$$

ですが、符号は 1 と -1 のどちらかなので、結局

$$\mathrm{sgn}\ \sigma^{-1} = \mathrm{sgn}\ \sigma$$

が成り立ちます。

　このことは、偶(奇)置換の逆置換は偶(奇)置換と言うことからも、自然に導かれます。

第6回練習課題の解答

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = O$$

が成り立ちます。

一方、行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対しては、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = E$$

が成り立ちます。