線形代数１・講義資料

$\boxed{\text{第８回}}$

(2023年6月23日(金)講義分)

$\boxed{\text{第８回本題}}$

　今回は行列式に関するお話(の１回目)です。その幾何学的意味については、教科書 §11 で詳しく学びますが、先に少しだけ、簡単に触れておくことにします。

　2 次正方行列

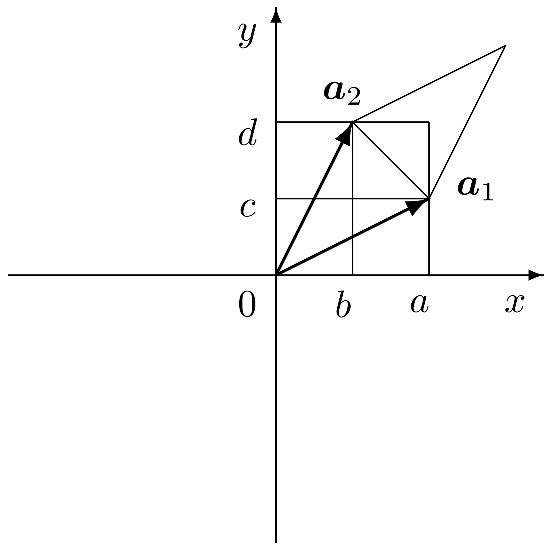
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が正則である(つまり逆行列を持つ) ための条件は $ad - bc \neq 0$ でした。この $ad - bc$ は、行列 A の二つの列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

がなす平行四辺形の面積を表しています。

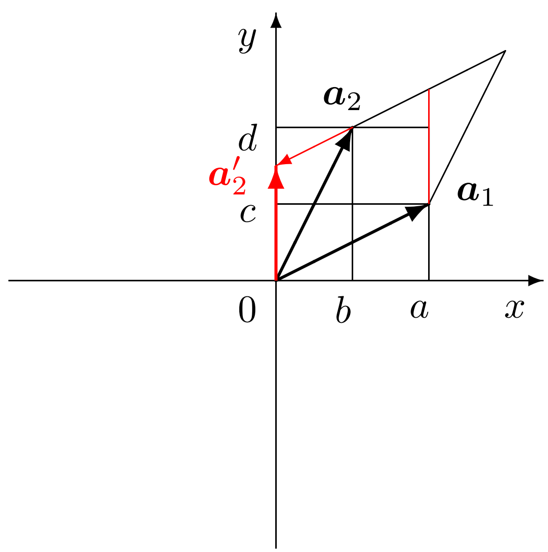
ただし $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の配置が(なす角が π 未満の方に回るとして) 反時計回り(＝左回り)のとき正ですが、時計回り(＝右回り)のとき負になります。



(このままでも証明できますが…)

　このことは、この平行四辺形の面積が、行列の基本変形(列変形)の(3) で変わらないことと、下三角行列(上三角行列でも構いません) の行列式が対角成分の積であることを用いても確かめることができます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b-\frac{b}{a}a \\ c & d-\frac{b}{a}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}$$



(こちらの方が簡単です。)

第４回の練習課題で求めた条件

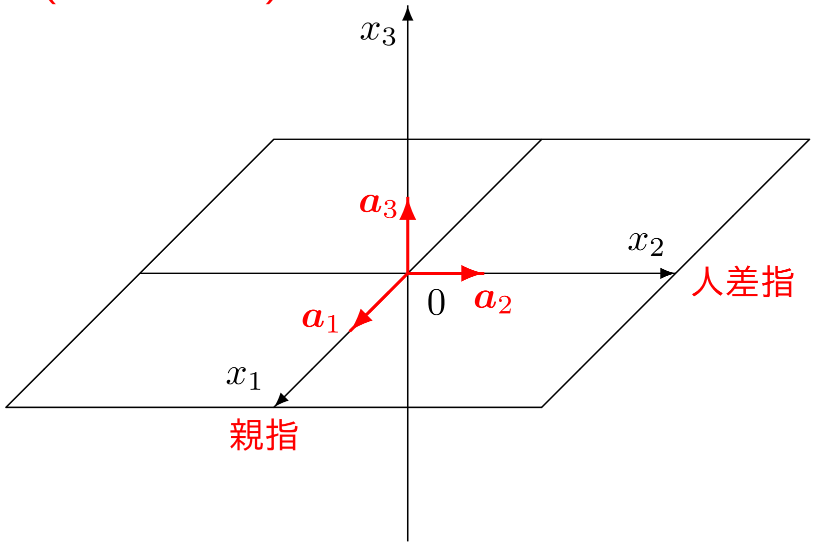
$$\begin{gathered}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\end{gathered}$$

が、実は 3 次正方行列

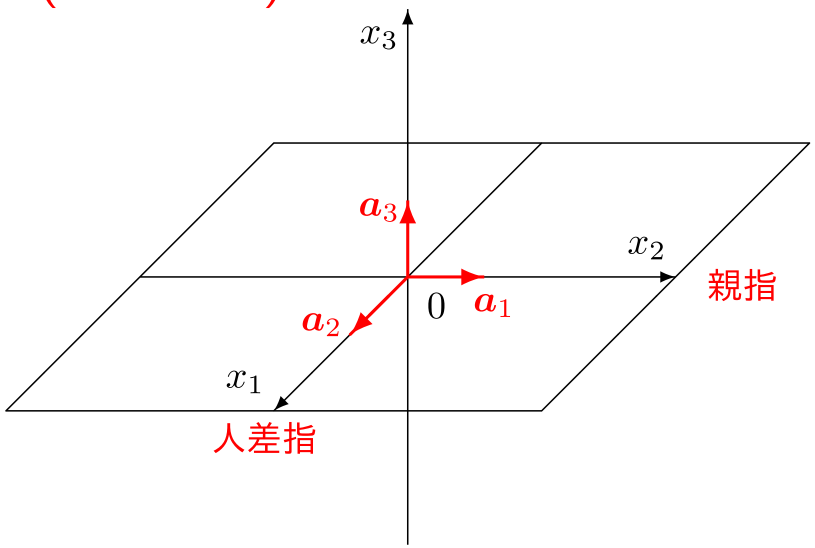
$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

が正則であるための条件です。条件式左辺の 3 次多項式は、行列 A の三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ がなす平行六面体の体積を表しています。ただし $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の配置が右手系(フレミングの法則のときの右手の親指・人差指・中指の配置)のとき正ですが、左手系(同上左手の指配置)のとき負になります。

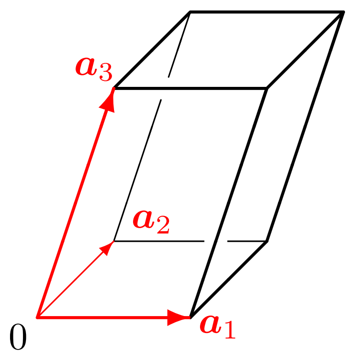
[右手系(の代表例)]



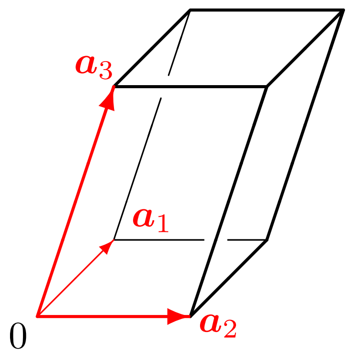
[左手系(の代表例)]



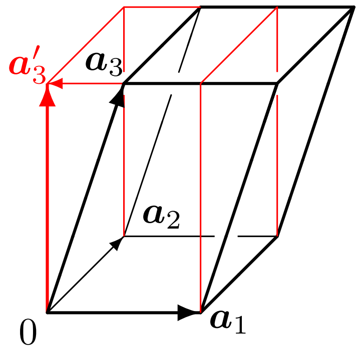
［一般的な右手系］



［一般的な左手系］



　このこともやはり、この平行六面体の体積が、行列の基本変形(列変形)の(3) で変わらないことと、下三角行列(上三角行列でも構いません) の行列式が対角成分の積であることを用いて確かめることができます。(第４回練習課題解答の行変形の内、(3)だけ施す感じの変形を、列変形に置き換えて試してみましょう。)



　2 次の場合の反時計回り(時計回り)、3 次の場合の右手系(左手系)が、それぞれ正の向き＝表向き(負の向き＝裏向き) を表していると考えます。

さて、一般の n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

について、同様に n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が作る n 次元の立体の n 次元体積を、向きを正負で反映させつつ表した式が、前回の置換を用いて、次のように表されます。

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

この n 次多項式を、行列 A の行列式と呼び、$|A|, \det A$ または

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と表します(教科書72頁参照)。

2 次と 3 次の場合について、この定義通りに書き下してみると、既にご紹介した式が得られます。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \varepsilon \; a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn} (1\ 2)\; a_{12}a_{21}$$

$$= ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &\operatorname{sgn} \varepsilon \; a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn} (1\ 2\ 3)\; a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn} (1\ 3\ 2)\; a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + \operatorname{sgn} (2\ 3)\; a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn} (1\ 2)\; a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn} (1\ 3)\; a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & \quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

$n=2,3$ までは、右下がりはプラス、左下がりはマイナスで、公式(サラスの方法と言います。教科書73頁参照) として覚えられますが、$n \geq 4$ の場合は、とりあえず $n=4$ でも

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \ & \operatorname{sgn} \varepsilon \ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \operatorname{sgn} (1\ 2\ 3)\ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + \operatorname{sgn} (1\ 3\ 2)\ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\ & + \operatorname{sgn} (1\ 2\ 4)\ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + \operatorname{sgn} (1\ 4\ 2)\ a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + \operatorname{sgn} (1\ 3\ 4)\ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ & + \operatorname{sgn} (1\ 4\ 3)\ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + \operatorname{sgn} (2\ 3\ 4)\ a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \operatorname{sgn} (2\ 4\ 3)\ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + \operatorname{sgn} (1\ 2)(3\ 4)\ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + \operatorname{sgn} (1\ 3)(2\ 4)\ a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + \operatorname{sgn} (1\ 4)(2\ 3)\ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\operatorname{sgn}(1\ 2)\ a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+\operatorname{sgn}(1\ 3)\ a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+\operatorname{sgn}(1\ 4)\ a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}\\
&+\operatorname{sgn}(2\ 3)\ a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+\operatorname{sgn}(2\ 4)\ a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}+\operatorname{sgn}(3\ 4)\ a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}\\
&+\operatorname{sgn}(1\ 2\ 3\ 4)\ a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+\operatorname{sgn}(1\ 2\ 4\ 3)\ a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}\\
&+\operatorname{sgn}(1\ 3\ 2\ 4)\ a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}+\operatorname{sgn}(1\ 3\ 4\ 2)\ a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}\\
&+\operatorname{sgn}(1\ 4\ 2\ 3)\ a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}+\operatorname{sgn}(1\ 4\ 3\ 2)\ a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}\\
=\ & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}\\
&+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}\\
&+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}\\
&+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}\\
&-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}\\
&-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}\\
&-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}
\end{aligned}
$$

のように、右下がり左下がりで区別できず、もっと複雑です。

第３回でお話したような、左上から右下への対角線上に、小さい正方行列が並ぶような分割で、ちょうど上三角 (下三角でも構いません) になる場合には、例えば、

$$\left|\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned}
= \ & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}\cdot 0\cdot a_{44} + a_{13}a_{21}\cdot 0\cdot a_{44} \\
& + a_{12}a_{24}a_{33}\cdot 0 + a_{14}a_{21}a_{33}\cdot 0 + a_{13}a_{22}a_{34}\cdot 0 \\
& + a_{14}a_{22}\cdot 0\cdot a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}\cdot 0 + a_{11}a_{24}\cdot 0\cdot a_{43} \\
& + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}\cdot 0\cdot 0 + a_{14}a_{23}\cdot 0\cdot 0 \\
& - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}\cdot 0\cdot a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}\cdot 0 \\
& - a_{11}a_{23}\cdot 0\cdot a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}\cdot 0 - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\
& - a_{12}a_{23}a_{34}\cdot 0 - a_{12}a_{24}\cdot 0\cdot a_{43} - a_{13}a_{24}\cdot 0\cdot 0 \\
& - a_{13}a_{21}a_{34}\cdot 0 - a_{14}a_{23}\cdot 0\cdot 0 - a_{14}a_{21}\cdot 0\cdot a_{43}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) \ = \ |A_{11}| \cdot |A_{22}|
\end{aligned}
$$

のように簡単になること(教科書77頁参照) もありますが、一般の場合には、基本変形(3)で変わらないこと(教科書76〜77頁参照)を利用するか、または、次回のテーマである行列式の余因子展開(教科書83頁参照) を用いるのが得策でしょう。

ちなみに、ここまでのことは全て、列ベクトルを行ベクトルに置き換えても成り立ちます。従って、行列式を求める際に、列変形(3)と行変形(3)を混ぜて用いても構いませんが、逆行列を求める際には、混ぜて用いてはいけないので、注意が必要です。その理由は回を改めてお話します。

　行列式は、次の等式を満たします。

$$|AB| = |A| \cdot |B|, \quad |{}^t A| = |A|$$

証明は教科書76〜78頁を参照して下さい。2 次の場合は難しくないので、直接計算で確かめてみましょう。

　定義より $|E| = 1$ ですから、A が正則ならば(つまり逆行列 A^{-1} を持てば)、

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

より

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

特に A が正則ならば、$|A| \neq 0$ でなければならないこともわかります。この逆も成り立つことは、次回示します。

　また、特に直交行列については、A が直交行列であることの定義は ${}^tAA = E$ でしたから、

$$1 = |E| = |{}^tAA| = |{}^tA| \cdot |A| = |A| \cdot |A| = |A|^2$$

より、$|A| = \pm 1$ が成り立ちます。

　$|A| = 1$ のときが向きを変えない場合、$|A| = -1$ のときが向きを変える場合に、それぞれ対応しています。

2 次の場合で言うと、回転を表す直交行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

線対称移動を表す直交行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$$

で、確かにその通りになっています。

$\boxed{\text{第 7 回練習課題の解答}}$

(逆置換の問題)　4 次の置換では、恒等置換、互換

$$\varepsilon$$
$$(1\ 2)\quad(1\ 3)\quad(1\ 4)\quad(2\ 3)\quad(2\ 4)\quad(3\ 4)$$

はいずれも自分自身が逆置換です。また、メンバーの被らない互換の積

$$(1\ 2)(3\ 4)\quad(1\ 3)(2\ 4)\quad(1\ 4)(2\ 3)$$

も同様です。

　巡回置換では、

$$(1\ 2\ 3)\ \text{と}\ (1\ 3\ 2),\quad (1\ 2\ 4)\ \text{と}\ (1\ 4\ 2),$$
$$(1\ 3\ 4)\ \text{と}\ (1\ 4\ 3),\quad (2\ 3\ 4)\ \text{と}\ (2\ 4\ 3)$$

及び

$$(1\ 2\ 3\ 4)\ \text{と}\ (1\ 4\ 3\ 2),$$
$$(1\ 2\ 4\ 3)\ \text{と}\ (1\ 3\ 4\ 2),$$
$$(1\ 3\ 2\ 4)\ \text{と}\ (1\ 4\ 2\ 3)$$

が、それぞれお互いの逆置換になっています。逆回りを考えれば、すぐにわかります。

(互換の積で表す問題)　巡回置換 $(1,2,3)$ を互換の積で表すと、

$$(1\ 3)(1\ 2),\ \ (1\ 2)(2\ 3),\ \ (2\ 3)(1\ 3)$$

4 回以上かける遠回りも考えると他にもあります。

巡回置換 $(1,2,3,4)$ を互換の積で表すと、

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2),\ \ (1\ 3)(3\ 4)(1\ 2),\ \ (3\ 4)(1\ 4)(1\ 2)$$

$(1\ 2)$ で始めて 3 回で終わるものでもこれだけあるので、始めを変えればもっとあります。