

線形代数1・講義資料

第9回

(2023年6月30日(金)講義分)

第9回本題

3 次の行列式を、よく見てみると、

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となっています(教科書85頁参照)。

一般に n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列を除いて作った $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを、行列 A の (i, j) 余因子と呼び $\tilde{a}_{ij}$ と表します(教科書81頁参照)。

この記号を用いると、3 次の行列式は、

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13}$$

と表せます。これを 3 次の行列式 $|A|$ の第 1 行に関する余因子展開と言います。このような展開が、任意の行または任意の列に関して成り立つことが、全く同様にして確かめられます(再び教科書 83 頁参照)。

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{23}\tilde{a}_{23} \\ &= a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{33}\tilde{a}_{33} \\ &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} \\ &= a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{32}\tilde{a}_{32} \\ &= a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{33}\tilde{a}_{33} \end{aligned}$$

どの余因子展開を用いるにせよ、2 次の行列式を 3 個計算することで、3 次の行列式を求めることができます。

特に、0 が多い行または列に関して余因子展開するのが得策で、たとえば、特に $a_{12} = a_{13} = 0$ のとき、

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11}$$

のように式が簡単になります(教科書74頁参照)。

従って、一般の場合にも、たとえば $a_{11} \neq 0$ ならば、列変形(3)を用いて $a_{12} = a_{13} = 0$ となるように行列を変形すれば、(または行変形(3)を用いて $a_{21} = a_{31} = 0$ となるように行列を変形すれば、) 行列式の計算が楽になります。

この行列式の余因子展開が、 n 次正方行列 A の行列式についても、同様に考えられます。たとえば第 1 行に関する余因子展開は、次のようになります(教科書 83 頁参照)。

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + \cdots + a_{1n}\tilde{a}_{1n}$$

従って、 $n - 1$ 次の行列式を n 個計算することで、 n 次の行列式を求めることができます。

たとえば $a_{11} \neq 0$ ならば、列変形(3)を用いて $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$ となるように行列を変形すれば、(または行変形(3)を用いて $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$ となるように行列を変形すれば、) 行列式の計算が楽になります。

このような列(行)変形(3)を繰り返すことにより、下(上)三角行列が得られれば、対角成分の積として、行列式が得られます(再び教科書74頁参照)。

変形の途中で対角成分が0になってしまった場合には、変形(2)により二つの列(行)を入れ替える方法もありますが、行列式の定義からわかるように、**変形(2)によって行列式の正負の符号が入れ替わる**(つまり -1 倍になる)点に注意が必要です(教科書74頁参照)。

ちなみに、**変形(1)では**、ある列(行)を定数倍すれば、行列式も**同じ定数倍**になります(これも教科書74頁参照)。

余因子について、もう少し詳しく見てみたいと思います。一旦 3 次の場合に話を戻します。

3 次の行列式は、

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13}$$

と表せましたが、ここで、次の 3 次式について、考えてみましょう。

$$a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13}$$

これは行列式に関する上の等式の右辺の a_{11}, a_{12}, a_{13} にそれぞれ a_{21}, a_{22}, a_{23} を代入したものですから、次の行列式と一致します。

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

この行列式は、**第 1 行**に第 2 行の -1 倍を足す行変形(3)によって、第 1 行の成分を一斉に 0 にしてしまえるので、その値は 0 です。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

行に関する余因子展開から、全く同様にして得られる他の等式も併せて列挙すると、次のようになります。

$$a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13} = 0$$

$$a_{31}\tilde{a}_{11} + a_{32}\tilde{a}_{12} + a_{33}\tilde{a}_{13} = 0$$

$$a_{11}\tilde{a}_{21} + a_{12}\tilde{a}_{22} + a_{13}\tilde{a}_{23} = 0$$

$$a_{31}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{23} = 0$$

$$a_{11}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{33} = 0$$

$$a_{21}\tilde{a}_{31} + a_{22}\tilde{a}_{32} + a_{23}\tilde{a}_{33} = 0$$

列に関する余因子展開から、同様にして得られる等式を、書き下してみましょう。

一般に、 n 次正方行列 A の (i, j) 余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を (j, i) 成分とする行列(つまり (i, j) 成分とする行列の転置行列)を、行列 A の余因子行列と呼び、 $\tilde{A}$ で表します(教科書85頁参照)。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

添字 (i, j) に逆らって転置する必要がある所は、忘れやすいので要注意！

$n = 2$ の場合は、

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$n = 3$ の場合は、

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です (教科書 86 頁参照)。

行に関する余因子展開に関連する上の等式を、この余因子行列を用いて、まとめて表すと、次の等式になります。

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| E$$

一方、列に関する余因子展開に関連する等式(今回の練習課題)を、余因子行列を用いて、まとめて表すと、 $\tilde{A}A = |A| E$ となります。

等式

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot E$$

は、実は一般の n 次正方行列 A について成り立ちます。

従って、 $|A| \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

により、逆行列を与える公式が得られます(教科書86頁参照)。

ちなみに $|A| = 0$ のときは、 $A\tilde{A} = O$ が成り立つので、 $\tilde{A} \neq O$ ならば、 $\tilde{A}$ の0でない列ベクトルが、斉次方程式 $Ax = 0$ の非自明な(つまり0でない)解になっています。

ここで、連立方程式 $Ax = b$ に戻ってみましょう。 A が正則のとき、ただ一つの解が $x = A^{-1}b$ により得られました。

これを余因子行列を用いて書くと、

$$x = \frac{1}{|A|} \tilde{A}b$$

となります。

ここで、たとえば 3 次の場合に、列ベクトル $\tilde{A}b$ の第 1 成分を書いてみると

$$b_1\tilde{a}_{11} + b_2\tilde{a}_{21} + b_3\tilde{a}_{31}$$

となりますが、これは、行列式 $|A|$ の第 1 列に関する余因子展開

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31}$$

の右辺の a_{11}, a_{21}, a_{31} にそれぞれ b_1, b_2, b_3 を代入したものですから、次の行列式と一致します。

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

全く同様にして、 $\tilde{A}\mathbf{b}$ の第 2, 第 3 成分も、それぞれ次の行列式で表せます。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{b}_1 & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{b}_2 & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{b}_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{b}_2 \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}$$

これらを、 $x = \frac{1}{|A|} \tilde{A}\mathbf{b}$ の $\tilde{A}\mathbf{b}$ と置き換えて得られるのが、**クラメルの公式**で、これは一般の n でも成り立ちます (教科書 87 頁参照)。

より簡単な 2 次の場合について、第 5 回と同様に、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおいて考えると、 $\tilde{A}\mathbf{b}$ の第 1, 第 2 成分は、それぞれ

$$\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

で表されます。

これらと $|A|$ を併せると、第4回で復習した2元連立1次方程式の解の公式が得られ、またこれらの行列式たちがまさしく、同じく第4回で、解の個数の判定において重要とわかった3本の2次式

$$ad - bc, \quad aq - cp, \quad bq - dp$$

そのものまたは -1 倍になっています。

そして、これらが0になるならないで、第5回で導入した拡大係数行列 $(A \mid b)$ の階数が1以下か2かも判定できるというつながりになっています。

第8回練習課題の解答

2 個の 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

に対し、

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} |AB| &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh \\ &= (ad - bc)(eh - fg) = |A| \cdot |B| \end{aligned}$$

一方、

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

より、

$$|{}^tA| = ad - cb = ad - bc = |A|$$