

線形代数1・講義資料

演習第3回

(2023年7月7日(金)講義分)

問題 1 (に当てはまる数を解答して下さい。)

置換 σ の符号 (偶置換は 1, 奇置換は -1) を $\text{sgn } \sigma$ で表すとき、

$$\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\text{ア}}$$

$$\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\text{イ}}$$

$$\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{ウ}}$$

$$\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{エ}}$$

が成り立ちます。

問題 2 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

a は実数とします。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$|A| = \text{ }$$

ですから、 $a \neq \text{ }$ のとき $|A| \neq 0$ となり、逆行列 A^{-1} が存在します。

A の余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \\ \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{ス}} & \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \end{pmatrix}$$

より、 $a \neq \boxed{\text{カ}}$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{\text{オ}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} \\ \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{シ}} \\ \boxed{\text{ス}} & \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \end{pmatrix}$$

となります。

また、 $a = \boxed{\text{カ}}$ のとき

$$\text{rank } A = \boxed{\text{タ}}, \quad \text{rank } \tilde{A} = \boxed{\text{チ}}$$

となります。

問題 3 (に当てはまる数を解答して下さい。)

連立方程式

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

の解は、クラメルの公式を用いると

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}$$

により与えられます。

ここで、

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ツ}}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{\text{テ}},$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ト}}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{\text{ナ}}$$

より、連立方程式 (3.1) の解は

$$x_1 = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \quad x_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \quad x_3 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

です。