

線形代数1・講義資料

第10回

(2023年7月14日(金)講義分)

第10回本題

教科書 §10 は「特別な形をした行列式」ということで、具体的な例のお話なので、今回この講義資料では、ちょっと離れて、基本変形と逆行列の関係について、補足しておこうと思います。

レポート課題第1回の問題3でも確かめてもらったように、3次正方行列 A に左から行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をかけることは、行列 A の第2行に第3行の k 倍を足す基本変形を表していました。

このことは A が正方行列でなくとも $3 \times m$ 行列であるとき一般に成り立ちます。

一方、この行列 B を、 $\ell \times 3$ 行列に右からかけると、第3列に第2列の k 倍を足す基本変形を表します

全く同様にして、 $3 \times m(\ell \times 3)$ 行列に左(右)から次の各行列をかけることはそれぞれ、行列の下に記した基本変形を表しています。

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行に第2行の k 倍を足す
(第2列に第1列の k 倍を足す)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行に第3行の k 倍を足す
(第3列に第1列の k 倍を足す)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第2行に第1行の k 倍を足す
(第1列に第2列の k 倍を足す)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第3行に第1行の k 倍を足す
(第1列に第3列の k 倍を足す)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

第3行に第2行の k 倍を足す
(第2列に第3列の k 倍を足す)

同じことは一般次数でも成り立ちます。実際、 (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は全て 0 であるような n 次正方行列を E_{ij} と表すとき、 $n \times m(\ell \times n)$ 行列に行列

$$E_n + kE_{ij} \quad (i \neq j)$$

を左(右)からかけることは、第 i 行に第 j 行の k 倍を足す(第 j 列に第 i 列の k 倍を足す) 基本変形を表しています。

ちなみに、行列 $E_n + kE_{ij}$ は、 $i < j$ のとき上三角行列、 $i > j$ のとき下三角行列なので、いずれにせよその行列式は対角成分の積で、

$$|E_n + kE_{ij}| = 1$$

(基本変形(3)は体積を変えない＝行列式を変えない)

が成り立ちます。

それでは、他の基本変形はどうでしょうか？

3 次の場合で言うと、 $3 \times m(\ell \times 3)$ 行列に左(右)から次の各行列をかけることはそれぞれ、行列の下に記した基本変形を表しています。

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行に k をかける
(第 1 列に k をかける)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 2 行に k をかける
(第 2 列に k をかける)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

第3行に k をかける
(第3列に k をかける)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行と第2行を入れ替える
(第1列と第2列を入れ替える)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1行と第3行を入れ替える
(第1列と第3列を入れ替える)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第2行と第3行を入れ替える
(第2列と第3列を入れ替える)

一般の次数では、 $n \times m(\ell \times n)$ 行列に、行列

$$E_n + (k - 1)E_{ii} \quad ((i, i) \text{ 成分だけ } k)$$

を左(右)からかけることが、第 i 行に k をかける(第 i 列に k をかける) 基本変形を表し、また、行列

$$E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad (i \neq j)$$

を左(右)からかけることが、第 i 行と第 j 行を入れ替える(第 i 列と第 j 列を入れ替える) 基本変形を表します。

行列 $E_n + (k - 1)E_{ii}$ は対角行列なので、行列式は対角成分の積で、

$$|E_n + (k - 1)E_{ii}| = k$$

(基本変形(1)は体積を k 倍＝行列式を k 倍)

また、行列 $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ の行列式については

$$|E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}| = -1$$

(基本変形(2)は向きを変える＝行列式を -1 倍)

が成り立ちます。

2 次の場合に、基本変形を表す行列を全て書き出してみま
しょう。

さて、 n 次正方行列 A が、行列 $B_1, B_2, \dots, B_p$ により表される基本変形(行変形)により、単位行列 E に変形出来たとしましょう。このとき

$$B_p \cdots B_2 B_1 A = E$$

ですから、この基本変形を表す行列たちの積が A の逆行列、すなわち、

$$A^{-1} = B_p \cdots B_2 B_1$$

ということになります。

掃き出し法で求めるときは

$$\begin{aligned}(A \mid E) &\longrightarrow B_1(A \mid E) \\&= (B_1A \mid B_1E) \\&= (B_1A \mid B_1) \\&\longrightarrow B_2(B_1A \mid B_1) \\&= (B_2B_1A \mid B_2B_1) \\&\longrightarrow \dots \\&\longrightarrow B_p(B_{p-1} \cdots B_2B_1A \mid B_{p-1} \cdots B_2B_1) \\&= (B_pB_{p-1} \cdots B_2B_1A \mid B_pB_{p-1} \cdots B_2B_1) \\&= (E \mid B_pB_{p-1} \cdots B_2B_1)\end{aligned}$$

と言う計算を行っている訳です。

一方、 n 次正方行列 A が、行列 $C_1, C_2, \dots, C_q$ により表される基本変形(列変形)により、単位行列 E に変形出来たとしましょう。このとき

$$AC_1C_2\cdots C_q = E$$

ですから、この基本変形を表す行列たちの積が A の逆行列、すなわち、

$$A^{-1} = C_1C_2\cdots C_q$$

ということになります。

ここでもし行変形と列変形を混ぜて単位行列 E に変形したとすると、

$$B_p \cdots B_2 B_1 A C_1 C_2 \cdots C_q = E$$

となり、仮に同じ変形を単位行列 E に施したとしても、

$$B_p \cdots B_2 B_1 E C_1 C_2 \cdots C_q = B_p \cdots B_2 B_1 C_1 C_2 \cdots C_q$$

が A の逆行列 A^{-1} となる保証はどこにもありません。

これが逆行列を求める際に、行変形と列変形を混ぜて使ってはいけない理由です。

ただし、行列式 $|A|$ を求めるだけなら、

$$\begin{aligned} 1 &= |E| \\ &= |B_p \cdots B_2 B_1 A C_1 C_2 \cdots C_q| \\ &= |B_p \cdots B_2 B_1| \cdot |A| \cdot |C_1 C_2 \cdots C_q| \\ &= |A| \cdot |B_p \cdots B_2 B_1| \cdot |C_1 C_2 \cdots C_q| \\ &= |A| \cdot |B_p \cdots B_2 B_1 C_1 C_2 \cdots C_q| \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{|B_p \cdots B_2 B_1 C_1 C_2 \cdots C_q|} \\ &= \frac{1}{|B_p| \cdots |B_2| \cdot |B_1| \cdot |C_1| \cdot |C_2| \cdots |C_q|} \end{aligned}$$

のように用いることはできます。

もっとも、行列式を求めるためには、単位行列 E まで変形しなくても、上三角行列または下三角行列まで変形すれば十分ですから、この考え方で行くなら、**基本変形(2)と(3)だけ**を用いて、

$$B_p \cdots B_2 B_1 A C_1 C_2 \cdots C_q = A' (\text{上または下三角行列})$$

と変形できたとして、その際**変形(2)を施した回数を r** とすると、

$$\begin{aligned} |A'| &= |B_p \cdots B_2 B_1 A C_1 C_2 \cdots C_q| \\ &= |B_p| \cdots |B_2| \cdot |B_1| \cdot |A| \cdot |C_1| \cdot |C_2| \cdots |C_q| \\ &= (-1)^r \cdot 1^{p+q-r} \cdot |A| \\ &= (-1)^r |A| \end{aligned}$$

より、 **$|A| = (-1)^r |A'|$** と計算する方が楽でしょう。

第9回練習課題の解答

3 次正方行列 A の列に関する余因子展開から、第9回 7～9 頁同様にして得られる等式は、次の通りです。

$$a_{12}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{31} = 0$$

$$a_{13}\tilde{a}_{11} + a_{23}\tilde{a}_{21} + a_{33}\tilde{a}_{31} = 0$$

$$a_{11}\tilde{a}_{12} + a_{21}\tilde{a}_{22} + a_{31}\tilde{a}_{32} = 0$$

$$a_{13}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{32} = 0$$

$$a_{11}\tilde{a}_{13} + a_{21}\tilde{a}_{23} + a_{31}\tilde{a}_{33} = 0$$

$$a_{12}\tilde{a}_{13} + a_{22}\tilde{a}_{23} + a_{32}\tilde{a}_{33} = 0$$

これらの等式は、行ベクトルと列ベクトルの積として、次のように表せます。

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

余因子行列 $\tilde{A}$ の行ベクトル(なので添字が逆) と元の行列 A の列ベクトルの積です。

これから、等式

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

の赤字の部分を得られます。

一方、第9回3頁の等式の内

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} \\ &= a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{32}\tilde{a}_{32} \\ &= a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{33}\tilde{a}_{33} \end{aligned}$$

から、

$$\left(\begin{array}{ccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} \right) = |A|$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} \right) = |A|$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} \right) = |A|$$

ですから、

等式

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

の赤字の部分を得られます。

よって、第9回12頁にも記したように、等式 $\tilde{A}A = |A| E$ が成り立つことがわかります。