

# 線形代数1・講義資料

第11回

(2023年7月21日(金)講義分)

## 第11回本題

今回は、3次元ベクトルの外積についてお話します。教科書では、行ベクトルで説明していますが、これまでの流れや、この後(後期の線形代数2など)とのつながりを考えて、ここでは列ベクトルで説明します。と言っても、全て転置すればよいだけで、本質的に異なるものではありません。

2 個の 3 次元列ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

に対して、何でもよいのもう 1 個、3 次元列ベクトル

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

を用意して、3 次正方行列

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を作ります。

その  $(i, 3)$  余因子 ( $i = 1, 2, 3$ ) を、余因子行列  $\tilde{A}$  を作る時のようにわざわざ転置しないで、そのまま並べた列ベクトルを、 $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  の外積と呼び、 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  で表します。 $(i, 3)$  余因子は、第  $i$  行と第 3 列を取り除いて計算されるので、 $\mathbf{a}_3$  の選び方には一切影響されません。

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

ですが、

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{e}_2 \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

と覚えられます (教科書 106 頁参照)。

ここで

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です。

教科書102頁では、この後触れる外積の性質を定義にしていますが、この覚え方の式を定義としている本も多いようです。

ちょっと紛らわしいかもしれませんが、 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1$ ,  $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2$  ととると、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \\
&= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\mathbf{e}_1 - (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\mathbf{e}_2 + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\mathbf{e}_3 \\
&= \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \\
&\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

も得られます。

それでは、一般の 3 次元列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  に対して、それらの外積  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  は、どのようなベクトルを表しているのでしょうか？

第 1 列と第 2 列を入れ替えると各  $(i, 3)$  余因子は  $-1$  倍になるので、

$$\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$$

です。この性質を交代律と言います。従って特に  $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1$  ととれば

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1$$

より

$$2(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{0}$$

なので結局

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

つまり、自分自身との外積は  $\boldsymbol{0}$  になります。

また、第 1 列または第 2 列を  $k$  倍(スカラー倍)すると各  $(i, 3)$  余因子も  $k$  倍になるので、

$$(k\mathbf{a}_1) \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \times (k\mathbf{a}_2) = k(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$$

です。従って特に  $\mathbf{a}_2 = k\mathbf{a}_1$  ととれば

$$\mathbf{a}_1 \times (k\mathbf{a}_1) = k(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

つまり、**平行なベクトルどうしの外積も  $\mathbf{0}$**  になります。逆に外積が  $\mathbf{0}$  になるのは、互いに平行なとき(少なくとも一方が  $\mathbf{0}$  のときを含む)に限ることも、定義から確かめられます。

直交すると  $\mathbf{0}$  になる内積とは対照的です。

第 1 列または第 2 列を 2 個のベクトルの和で表すと、各  $(i, 3)$  余因子も、それぞれについて計算した余因子の和になるので、

$$(\mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}''_1) \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}''_1 \times \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_1 \times (\mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}''_2) = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}''_2$$

つまり **分配律** が成り立ちます (ここまで、教科書 104 頁参照)。

上の3つの性質の内、2つがそれぞれ行列の基本変形(2)(1)と関係していることは、お気づきだと思います。

それでは基本変形(3)に対応する性質は何かと言うと、 $a_1$  に  $a_2$  の  $k$  倍を足すと

$$\begin{aligned}(a_1 + ka_2) \times a_2 &= a_1 \times a_2 + (ka_2) \times a_2 \\ &= a_1 \times a_2 + \mathbf{0} = a_1 \times a_2\end{aligned}$$

$a_2$  に  $a_1$  の  $k$  倍を足すと

$$\begin{aligned}a_1 \times (a_2 + ka_1) &= a_1 \times a_2 + a_1 \times (ka_1) \\ &= a_1 \times a_2 + \mathbf{0} = a_1 \times a_2\end{aligned}$$

で、外積は変わらないということになります。

行列式の第 3 列に関する余因子展開より、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3| &= |A| = \tilde{a}_{13}a_{13} + \tilde{a}_{23}a_{23} + \tilde{a}_{33}a_{33} \\ &= \langle \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \end{aligned}$$

が成り立ちます。これを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  の **3 重積** と呼びます。

実は余因子行列のところで出て来たものと同じ等式ですが、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle &= |\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_1| = 0, \\ \langle \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle &= |\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_2| = 0 \end{aligned}$$

より、外積  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  は、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の両方と直交することがわかります。

また、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2| &= \langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \rangle \\ &= ||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ですが、実はこの値は、 $\boldsymbol{a}_1$  と  $\boldsymbol{a}_2$  が 3 次元空間  $\mathbf{R}^3$  の中で作る平行四辺形の面積の 2 乗になっています。

ただし、等号成立のときは、 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$  より、 $\boldsymbol{a}_1$  と  $\boldsymbol{a}_2$  は平行(少なくとも一方が  $\mathbf{0}$  のときを含む)なので、平行四辺形はつぶれてしまって面積は 0 と考えます。

わかりやすい例で言うと、

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

の外積は、

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} a & b & \mathbf{e}_1 \\ c & d & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix}$$

ですから、

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 = \langle \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \rangle = (ad - bc)^2$$

で、確かにそのようになっています。

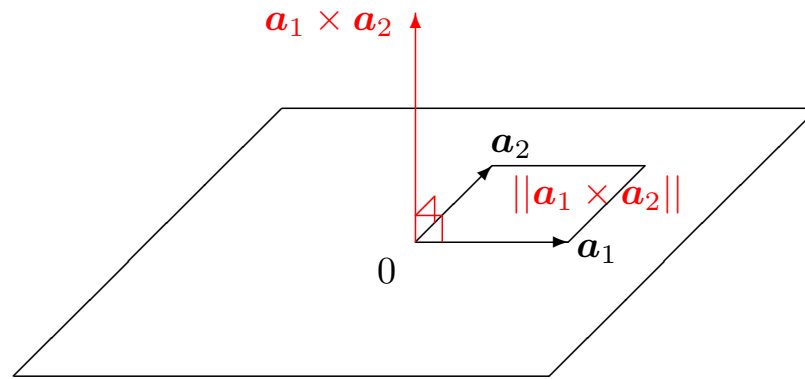
今、 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の両方と直交するのでしたから、それら  
が作る平行六面体は、実は  $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  が作る平行四辺形を底面とす  
る四角柱で、その高さは  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  の長さ  $\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$  です。ところ  
がその体積は、その底面積の 2 乗なわけですから、高さ＝底面積  
という等式が成り立ちます。

すなわち、外積  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の両方と直交し、かつそれら  
が作る平行四辺形の面積を長さとするベクトルと言うことになり  
ます(教科書102頁参照)。

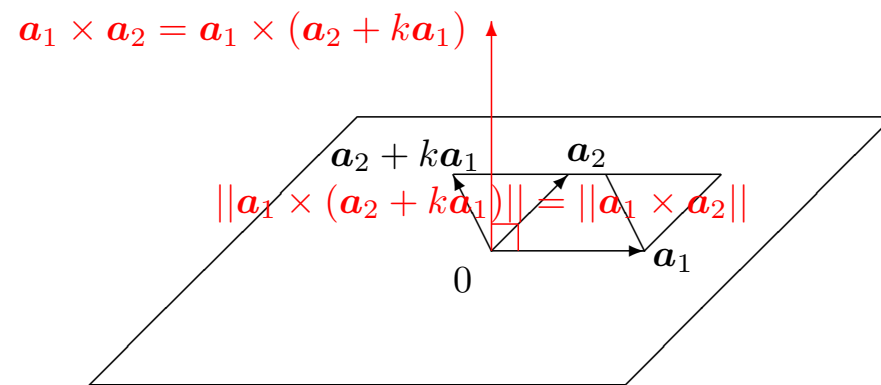
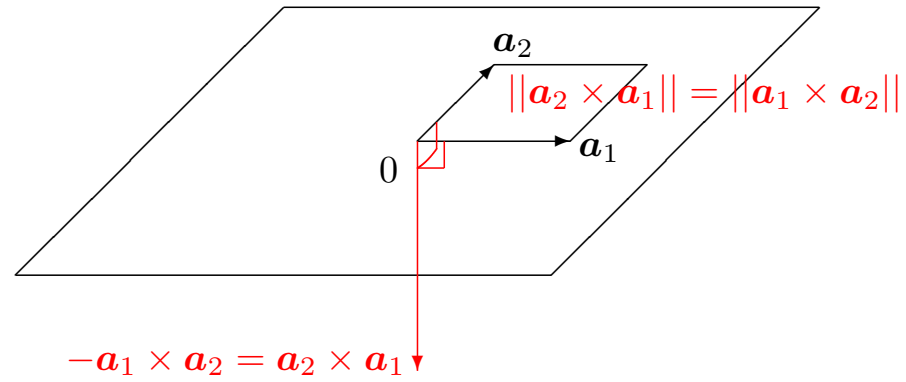
特に、 $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  がちゃんと平行四辺形を作るときには、

$$|\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 > 0$$

ですから、3 個のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  の配置は右手系です。  
従って外積は、任意に与えられた平行でない 2 個のベクトルが作  
る平面に対して、右手系の法ベクトルを与えてくれると言えます。



基本変形(2)で外積が  $-1$  倍になるのは、平面の向きが変わり、右手系の法ベクトルが逆方向を向くため、基本変形(3)で外積が変わらないことも、平行四辺形自体は形が変わっても、その面積や平面が向きも込めて変わらないためと解釈できます。



ちなみに、任意の 2 次元列ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

に対して、反時計回り (左回り) の法ベクトルも

$$\begin{pmatrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{e}_1 \\ a_{21} & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix}$$

と、4 頁の覚え方の式と同じ形で与えられることは、興味深いのではないのでしょうか？

さらに一般に  $n$  次元空間  $\mathbf{R}^n$  内に  $n - 1$  個のベクトルが与えられてちゃんと  $n - 1$  次元の空間を作っている (一次独立と言い、線形代数2で扱います) ときに、残る 1 次元方向の法ベクトルが、同じ形の公式で得られます。

$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$  が  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の作る平行四辺形の面積になることを、一般の場合に示すには、いろいろな方法がありますが、ここでは、直交行列を用いて説明しておきましょう。

まず外積  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  が、行列  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$  の余因子行列の転置  ${}^t\widetilde{A}$  の第 3 列であったことを思い出しておきましょう。 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$  のとき  $|A| \neq 0$  より、 $A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A}$  でしたから、 ${}^t\widetilde{A} = |A| {}^t(A^{-1})$  です。今  $|P| = 1$  である (回転を表す) 3 次の直交行列  $P$  (つまり  $P^{-1} = {}^tP$  を満たす行列) に対し、 $PA = (P\mathbf{a}_1 \ P\mathbf{a}_2 \ P(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2))$  ですが、一方

$$\begin{aligned} {}^t(\widetilde{PA}) &= |PA| {}^t((PA)^{-1}) = |P| \cdot |A| {}^t(A^{-1}P^{-1}) = 1 \cdot |A| {}^t(P^{-1}){}^t(A^{-1}) \\ &= |A|P {}^t(A^{-1}) = P(|A| {}^t(A^{-1})) = P {}^t\widetilde{A} \end{aligned}$$

が成り立ちます。

今、外積  $(Pa_1) \times (Pa_2)$  は、行列  $PA = (Pa_1 Pa_2 P(a_1 \times a_2))$  の余因子行列の転置  ${}^t(\widetilde{PA})$  の第 3 列ですが、 ${}^t(\widetilde{PA}) = P {}^t\widetilde{A}$  であり、また  ${}^t\widetilde{A}$  の第 3 列は、 $a_1 \times a_2$  ですから、結局、等式

$$(Pa_1) \times (Pa_2) = P(a_1 \times a_2)$$

が示されたことになります(この等式は直接計算でも示せます)。

これから、

$$\begin{aligned} \|a_1 \times a_2\|^2 &= |a_1 \ a_2 \ a_1 \times a_2| = |P| \cdot |a_1 \ a_2 \ a_1 \times a_2| \\ &= |Pa_1 \ Pa_2 \ P(a_1 \times a_2)| = |Pa_1 \ Pa_2 \ (Pa_1) \times (Pa_2)| \\ &= \|(Pa_1) \times (Pa_2)\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つので、後は  $P$  として、 $Pa_1, Pa_2$  の第 3 成分が共に 0 となるような直交行列を適当に選べば、回転では面積は変わらないので、13 頁のわかりやすい例に帰着します。

特に  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  が互いに直交する単位ベクトル、つまり

$$\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = 1, \quad \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 0$$

を満たす(一辺の長さが 1 の正方形を作るとも言えます) とき、  
行列

$$(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \quad (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$$

は、いずれも 3 次の直交行列となります(一辺の長さが 1 の立方体を作るとも言えます)。6頁の等式から典型例が得られます。

また逆に、任意の 3 次の直交行列は、上のいずれかの形で表せます。特に前の方が右手系で行列式が 1,  $\mathbf{R}^3$  の原点を中心とする回転を表します。一方後の方は左手系で行列式は  $-1$ , 向きを変えてしまうので、回転ではありません。

外積は、後期に線形代数2で学ぶ**グラム・シュミットの直交化法**(教科書235頁参照) と並んで、直交行列を作る有力な手段です。

## 第10回練習課題の解答

$2 \times m(\ell \times 2)$  行列に左(右)から次の各行列をかけることはそれぞれ、行列の下に記した基本変形を表しています。

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行に  $k$  をかける  
(第1列に  $k$  をかける)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第1行と第2行を入れ替える  
(第1列と第2列を入れ替える)

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行に第2行の  $k$  倍を足す  
(第2列に第1列の  $k$  倍を足す)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

第2行に  $k$  をかける  
(第2列に  $k$  をかける)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

第2行に第1行の  $k$  倍を足す  
(第1列に第2列の  $k$  倍を足す)