

線形代数1・講義資料

演習第4回

(2023年7月28日(金)講義分)

問題 1 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

a は実数とします。2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

と自然数 n に対し、

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。

さらに、特に $a \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。

問題 2 (に当てはまる数を解答して下さい。)

連立方程式

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

の一般解を、非斉次方程式の特殊解と斉次方程式の一般解の和の形で表してみましょう。

まず、非斉次方程式 (2.1) の特殊解として、例えば

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{ケ}} \\ x_2 = \boxed{\text{コ}} \\ x_3 = \boxed{\text{サ}} \end{cases}$$

がとれます。

一方、斉次方程式

$$(2.2) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

の自明でない(全てが 0 ではない)解として、例えば

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{シ}} \\ x_2 = \boxed{\text{ス}} \\ x_3 = \boxed{\text{セ}} \end{cases}$$

がとれます。このとき (2.2) の一般解は

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{シ}} t \\ x_2 = \boxed{\text{ス}} t \\ x_3 = \boxed{\text{セ}} t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

よって、(2.1) の一般解は

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{シ}} t \\ x_2 = \boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{ス}} t \\ x_3 = \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{セ}} t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

問題 3 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

a は実数とします。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & a^2 & a^4 \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$|A| = \text{ソ}$$

ですから、 $a \neq \text{タ}$ かつ $a \neq \text{チ}$ (但し $\text{タ} < \text{チ}$) のとき $|A| \neq 0$ となり、逆行列 A^{-1} が存在します。

A の余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & \boxed{\text{テ}} & \boxed{\text{ト}} \\ \boxed{\text{ナ}} & \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヌ}} \\ \boxed{\text{ネ}} & \boxed{\text{ノ}} & \boxed{\text{ハ}} \end{pmatrix}$$

より、 $a \neq \boxed{\text{タ}}$ かつ $a \neq \boxed{\text{チ}}$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & \boxed{\text{テ}} & \boxed{\text{ト}} \\ \boxed{\text{ナ}} & \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヌ}} \\ \boxed{\text{ネ}} & \boxed{\text{ノ}} & \boxed{\text{ハ}} \end{pmatrix}$$

となります。

また、 $a = \boxed{\text{タ}}$ のとき

$$\text{rank } A = \boxed{\text{ヒ}}, \quad \text{rank } \tilde{A} = \boxed{\text{フ}}$$

$a = \boxed{\text{チ}}$ のとき

$$\text{rank } A = \boxed{\text{ヘ}}, \quad \text{rank } \tilde{A} = \boxed{\text{ホ}}$$

となります。