

線形代数I・中間レポート課題

(2023年6月9日(金)出題分)

提出方法

1. 全ての問題に解答して下さい。
2. 解答を所定の解答用紙(この問題と同じページにある Word ファイル) に記入して下さい。
3. 解答用紙のファイル名は
si23rep1(学籍番号).docx
として、Moodleに提出して下さい。
4. 提出締切は6月16日(金)午後11時59分(厳守)です。

記入上の注意

1. 学籍番号と氏名を忘れずに記入して下さい。
2. 解答は所定の解答欄に記入し、正誤欄、備考欄には何も記入しないで下さい。
3. 数式の記入に当たっては次のことに注意して下さい。

(1) べき乗などの上付き文字は、上付きにしなくても、「^」を用いて、次のように入力すれば十分です。

例： $x^2 \cdots x^2$, $x^{12} \cdots x^{12}$

(2) 下付き文字は、下付きにしなくても、「_」を用いて、次のように入力すれば十分です。

例： $x_2 \cdots x_2$, $x_{12} \cdots x_{12}$

これらは数式を含んだ文書作成に便利なTexのコマンドです。と言っても、他の数式をTexのコマンドで書く必要はありません。

(3) 分数は $\frac{1}{2}$ でなくても、1/2 と入力して構いません。ただし必要に応じて括弧は忘れずに。

例： $1 + \frac{1}{2} \cdots 1 + (1/2)$

4. Word での入力では、次の点に注意が必要なようです。

(1) 英字で入力するとき、一文字目を小文字で入力しても大文字に変換されてしまう(ことがある)ので、その場合は、一度入力してから一文字目を小文字に入力しなおして下さい。

(2) 丸括弧「(」で式を始めると、角括弧「]」で閉じてても丸括弧「)」に変換されてしまう(ことがある)ので、その場合は、一旦「)]」と入力してから「)」を削除して下さい。

(注：1～4の内、全ての注意が今回必要とは限りません。)

問題 1 (に当てはまる数を解答して下さい。)

行列 A の階数(基本変形で得られる階段行列の段数) を $\text{rank } A$ で表すとき、

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{ア}}$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{イ}}$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{ウ}}$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{エ}}$$

が成り立ちます。

問題 2 (に当てはまる数を解答して下さい。)

連立方程式

$$(2.1) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

の一般解を、非斉次方程式の特殊解と斉次方程式の一般解の和の形で表してみましょう。

まず、非斉次方程式 (2.1) の特殊解として、例えば

$$\begin{cases} x_1 = \text{オ} \\ x_2 = \text{カ} \\ x_3 = \text{キ} \end{cases}$$

がとれます。

一方、斉次方程式

$$(2.2) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

の自明でない(全てが 0 ではない)解として、例えば

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{ク}} \\ x_2 = \boxed{\text{ケ}} \\ x_3 = \boxed{\text{コ}} \end{cases}$$

がとれます。このとき (2.2) の一般解は

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{ク}} t \\ x_2 = \boxed{\text{ケ}} t \\ x_3 = \boxed{\text{コ}} t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

よって、(2.1) の一般解は

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{\text{才}} + \boxed{\text{ク}} t \\ x_2 = \boxed{\text{力}} + \boxed{\text{ケ}} t \\ x_3 = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{コ}} t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表されます。

問題 3 (に当てはまる数または式を解答して下さい。)

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列 A^{-1} を、掃き出し法(拡大係数行列 $(A \mid E)$ の行変形)によって求めてみましょう。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ (i) 第 $\boxed{\text{サ}}$ 行と第 $\boxed{\text{シ}}$ 行を入れ替える。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ (ii) 第 $\boxed{\text{ス}}$ 行と第 $\boxed{\text{セ}}$ 行を入れ替える。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

↓ (iii) 第 $\boxed{\text{ソ}}$ 行に第 $\boxed{\text{タ}}$ 行の $\boxed{\text{チ}}$ 倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 1 & \boxed{\text{ツ}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

↓ (iv) 第 $\boxed{\text{テ}}$ 行に第 $\boxed{\text{ト}}$ 行の $\boxed{\text{ナ}}$ 倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{\text{ツ}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & b & 1 & 1 & \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヌ}} \end{array} \right)$$

↓ (v) 第 $\boxed{\text{ネ}}$ 行に第 $\boxed{\text{ノ}}$ 行の $\boxed{\text{ハ}}$ 倍を足す。

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{\text{ツ}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & 1 & 1 & \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヒ}} \end{array} \right)$$

より、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{\text{ツ}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヒ}} \end{pmatrix}$$

です。