

数理科学B・講義ノート

第1回

(2025年 4月11日(金))配信分)

§1. 3次元ユークリッド空間内の曲面の曲率

§1.1 線形代数の準備

3次元ユークリッド空間内の曲面を扱う前に、それらの考察に必要な線形代数の準備をしておこう。主な内容は3次元ベクトル空間の外積と直交行列（変換）である。

二つの3次元の列ベクトル $V = {}^t(v_1, v_2, v_3)$, $W = {}^t(w_1, w_2, w_3)$ に対し、それらの**外積**を次式で定義する。

$$V \times W = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

定義より直ちに

$$(a_1 V_1 + a_2 V_2) \times W = a_1 V_1 \times W + a_2 V_2 \times W$$

が従う。

また $W \times V = -V \times W$ も従う。特に $V = W$ ととれば、
 $V \times V = 0$ を得る。これらより、さらに一般に V と W が平行な
らば、 $V \times W = 0$ が成り立つ。

定義より次の公式も容易に示せる。

$$\langle V \times W, U \rangle = |V, W, U|$$

問1.1 示せ。

これを V, W, U の**三重積**と言う。特に $U = V, W, V \times W$ とと
れば、 $\langle V \times W, V \rangle = |V, W, V| = 0$, $\langle V \times W, W \rangle = |V, W, W| = 0$
および

$$|V, W, V \times W| = \langle V \times W, V \times W \rangle = \|V \times W\|^2 \geq 0$$

を得る。

定義より次の公式も容易に示せる。

$$\langle V, W \rangle^2 + \|V \times W\|^2 = \|V\|^2 \|W\|^2$$

問1.2 示せ。

これから、

$$\begin{aligned}\|V \times W\|^2 &= \|V\|^2 \|W\|^2 - \langle V, W \rangle^2 \\ &= \|V\|^2 \|W\|^2 - \|V\|^2 \|W\|^2 \cos^2 \theta \\ &= (\|V\| \cdot \|W\| \sin \theta)^2\end{aligned}$$

を得る。

まとめると、 $V \times W$ は V, W 両方と直交するベクトルで、その絶対値は V と W が作る平行四辺形の面積に一致する。 V と W が平行でない限り、 $V, W, V \times W$ は3次元ベクトル空間の基底をなし、その配置は**右手系**、すなわち右手の親指、人差指、中指の配置となる。

今、任意の $P \in SO(3)$ に対し、その列ベクトルを V_1, V_2, V_3 とおくと、これらは右手系をなし、特に $V_3 = V_1 \times V_2$ と書ける。

逆に、 $\|V_1\| = \|V_2\| = 1, \langle V_1, V_2 \rangle = 0$ を満たす V_1, V_2 に対し、 $(V_1, V_2, V_1 \times V_2) \in SO(3)$ が成り立つ。

さらに、 $\|V_1\| = \|V_2\| = \|W_1\| = \|W_2\| = 1,$
 $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle W_1, W_2 \rangle = 0$ を満たす V_1, V_2, W_1, W_2 に対し、

$$\begin{aligned} P &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2) (V_1, V_2, V_1 \times V_2)^{-1} \\ &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)^t (V_1, V_2, V_1 \times V_2) \end{aligned}$$

とおくと、 $P \in SO(3)$ で $PV_1 = W_1, PV_2 = W_2$ を満たす。

問1.3 確かめよ。

任意のベクトル V と W の内積と直交行列 P の間に $\langle PV, PW \rangle = \langle V, W \rangle$ なる関係が成り立つことは既に見たが、任意のベクトル V と W の外積と直交行列 P の間についても次の関係が成り立つ。

$$P(V \times W) = PV \times PW$$

実際、外積の性質から、 $PV \times PW$ は PV, PW と直交する。一方、 $V \times W$ は V, W と直交するので、内積と直交行列の性質から、 $P(V \times W)$ は PV, PW と直交する。よって、 $P(V \times W)$ と $PV \times PW$ は平行である。

ここで、

$$\begin{aligned}\langle PV \times PW, P(V \times W) \rangle &= |PV, PW, P(V \times W)| \\ &= |P| \cdot |V, W, V \times W| \\ &= 1 \cdot \langle V \times W, V \times W \rangle \\ &= \langle P(V \times W), P(V \times W) \rangle\end{aligned}$$

より $P(V \times W)$ と $PV \times PW$ は一致することがわかる。

関数を成分とするベクトルや行列の微分について、少し見ておこう。まず微分そのものであるが、これは、

$$V'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = \frac{d}{dt} (V_1(t), V_2(t), V_3(t)) = (V_1'(t), V_2'(t), V_3'(t))$$

のように、各成分毎に微分すると約束しておく。

このとき、内積、外積、行列の積、行列式それぞれの微分について、元々の積の微分の公式をより、次が成り立つ。

$$(\langle V_1(t), V_2(t) \rangle)' = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle + \langle V_1(t), V_2'(t) \rangle$$

$$(V_1(t) \times V_2(t))' = V_1'(t) \times V_2(t) + V_1(t) \times V_2'(t)$$

$$(P(t)Q(t))' = P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)$$

$$\begin{aligned} |P(t)|' &= \frac{d}{dt} |V_1(t), V_2(t), V_3(t)| \\ &= |V_1'(t), V_2(t), V_3(t)| + |V_1(t), V_2'(t), V_3(t)| \\ &\quad + |V_1(t), V_2(t), V_3'(t)| \end{aligned}$$

特に $\|V(t)\|$ が t によらず一定のとき、

$$\begin{aligned} 0 &= (\|V(t)\|^2)' = (\langle V(t), V(t) \rangle)' \\ &= \langle V'(t), V(t) \rangle + \langle V(t), V'(t) \rangle = 2\langle V(t), V'(t) \rangle \end{aligned}$$

より、 $V'(t)$ が $V(t)$ と直交することがわかる。

§1.2. 曲率

曲面と言えばこれまで主として関数 $z = f(x, y)$ のグラフを考えて来た。計算の都合上以下 f は C^2 級であると仮定しよう。さて、グラフの形状を調べるためにやはり 2 次偏導関数を用いたことを思い出してみよう。

そこで、各点毎に座標軸を取り替えると言う離れ業をここでも使うことにする。もっとも今回はかなり面倒な計算になる。

まず、関数 $y = f(x_0, y_0)$ のグラフの点 $(x_0, y_0, f(x_0))$ が原点に来るよう平行移動による座標変換を行えば、

$$z + f(x_0, y_0) = f(x + x_0, y + y_0)$$

となる。さて、新しい原点における接ベクトルは $^t(1, 0, f_x(x_0, y_0))$,
 $^t(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ で張られるので、右手系で上向きの法ベクトルは
 $^t(-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$ である。これを絶対値で割って単位
ベクトルとしたものが $^t(0, 0, 1)$ となるような向きを変えない直交
変換を考える。新しい座標を $^t(X, Y, Z)$ で表すと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

ただし

$$\begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}} \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。他の p_{ij} は後で適当に選ぶことにするが、向きを変えない直交変換なので、

$$p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31} = p_{13}$$

$$p_{31}p_{12} - p_{32}p_{11} = p_{23}$$

$$p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = p_{33}$$

が成り立つことに注意する。

座標変換後の曲面を表す式は、次のようになる。

$$p_{31}X + p_{32}Y + p_{33}Z + f(x_0, y_0) = f(p_{11}X + p_{12}Y + p_{13}Z + x_0, p_{21}X + p_{22}Y + p_{23}Z + y_0)$$

原点の近くでは Z は (X, Y) の関数で書けていることを見越して、
両辺を X, Y で微分してみると、

$$p_{31} + p_{33}Z_X = f_x(\cdots)(p_{11} + p_{13}Z_X) + f_y(\cdots)(p_{21} + p_{23}Z_X)$$

$$p_{32} + p_{33}Z_Y = f_x(\cdots)(p_{12} + p_{13}Z_Y) + f_y(\cdots)(p_{22} + p_{23}Z_Y)$$

もう一度 X, Y で微分してみると、

$$\begin{aligned} p_{33}Z_{XX} &= f_{xx}(\cdots)(p_{11} + p_{13}Z_X)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(p_{11} + p_{13}Z_X)(p_{21} + p_{23}Z_X) \\ &\quad + f_{yy}(\cdots)(p_{21} + p_{23}Z_X)^2 + f_x(\cdots)p_{13}Z_{XX} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{XX} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{33}Z_{XY} &= f_{xx}(\cdots)(p_{11} + p_{13}Z_X)(p_{12} + p_{13}Z_Y) + f_{yy}(\cdots)(p_{21} + p_{23}Z_X)(p_{22} + p_{23}Z_Y) \\ &\quad + f_{xy}(\cdots)\{(p_{11} + p_{13}Z_X)(p_{22} + p_{23}Z_Y) + (p_{21} + p_{23}Z_X)(p_{12} + p_{13}Z_Y)\} \\ &\quad + f_x(\cdots)p_{13}Z_{XY} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{XY} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{33}Z_{YY} &= f_{xx}(\cdots)(p_{12} + p_{13}Z_Y)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(p_{12} + p_{13}Z_Y)(p_{22} + p_{23}Z_Y) \\ &\quad + f_{yy}(\cdots)(p_{22} + p_{23}Z_Y)^2 + f_x(\cdots)p_{13}Z_{YY} + f_y(\cdots)p_{23}Z_{YY} \end{aligned}$$

$(X, Y) = (0, 0)$ では $Z = 0, Z_X = Z_Y = 0$ を代入すれば、

$$p_{33}Z_{XX} = f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{11}p_{21} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}^2 \\ + \{f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}\}Z_{XX}$$

$$p_{33}Z_{XY} = f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}p_{12} + f_{xy}(x_0, y_0)\{p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12}\} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}p_{22} \\ + \{f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}\}Z_{XY}$$

$$p_{33}Z_{YY} = f_{xx}(x_0, y_0)p_{12}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{12}p_{22} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{22}^2 \\ + \{f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}\}Z_{YY}$$

より、

$$\begin{aligned}
Z_{XX} &= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{11}p_{21} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}^2}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}} \\
Z_{XY} &= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}p_{12} + f_{xy}(x_0, y_0)(p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12}) + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}p_{22}}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}} \\
Z_{YY} &= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)p_{12}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{12}p_{22} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{22}^2}{p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} + f_y(x_0, y_0)p_{23}}
\end{aligned}$$

これが座標軸を接平面と法線にあわせた時の、2階偏微分係数を与える式である。

これらが作る 2 次対称行列

$$\begin{pmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{XY} & Z_{YY} \end{pmatrix}$$

の固有値、トレース（固有値の和）の半分、行列式（固有値の積）を、それぞれ曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ における**主曲率**、**平均曲率**、**Gauss 曲率**と呼ぶ。主曲率は、曲面を法線を通る平面で切ったとき、切り口に現れる曲線の曲率の最大値と最小値である。

問1.4 これらが P の選び方によらないことを確かめよ。

平均曲率を H , Gauss 曲率を K で表す。

具体的に計算してみると、分母に現れる式の値は、

$$\begin{aligned} p_{33} - f_x(x_0, y_0)p_{13} - f_y(x_0, y_0)p_{23} &= \frac{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}{\sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}} \\ &= \sqrt{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2} \end{aligned}$$

であり、

$(Z_{XX} + Z_{YY})$ の分子

$$\begin{aligned} &= f_{xx}(x_0, y_0)(p_{11}^2 + p_{12}^2) + 2f_{xy}(x_0, y_0)(p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22}) + f_{yy}(x_0, y_0)(p_{21}^2 + p_{22}^2) \\ &= f_{xx}(x_0, y_0)(1 - p_{13}^2) + 2f_{xy}(x_0, y_0)(0 - p_{13}p_{23}) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 - p_{23}^2) \\ &= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(1 + f_y(x_0, y_0)^2) - 2f_{xy}(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 + f_x(x_0, y_0)^2)}{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2} \end{aligned}$$

より平均曲率は、

$$H = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(1 + f_y(x_0, y_0)^2) - 2f_{xy}(x_0, y_0)f_x(x_0, y_0)f_y(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(1 + f_x(x_0, y_0)^2)}{2(1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2)^{3/2}}$$

となり、また

$(Z_{XX}Z_{YY} - Z_{XY}^2)$ の分子

$$\begin{aligned} &= (f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{11}p_{21} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}^2) \\ &\quad \times (f_{xx}(x_0, y_0)p_{12}^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)p_{12}p_{22} + f_{yy}(x_0, y_0)p_{22}^2) \\ &\quad - \{f_{xx}(x_0, y_0)p_{11}p_{12} + f_{xy}(x_0, y_0)(p_{11}p_{22} + p_{21}p_{12}) + f_{yy}(x_0, y_0)p_{21}p_{22}\}^2 \\ &= (f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2)(p_{11}^2p_{22}^2 + p_{21}^2p_{12}^2 - 2p_{11}p_{12}p_{21}p_{22}) \\ &= (f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2)(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})^2 \\ &= (f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2)p_{33}^2 \\ &= \frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2} \end{aligned}$$

より Gauss 曲率は、

$$K = \frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{(1 + f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2)^2}$$

となる。

問1.5 曲面 $z = ax^2 + by^2$, $z = xy$ の平均曲率並びに Gauss 曲率を計算せよ。また、原点において、主曲率を求めよ。