

数理科学B・講義ノート

第2回

(2025年 4月18日(金)配信分)

§1. 3次元ユークリッド空間内の曲面の曲率(続き)

§1.2. 曲率(続き)

回転面について、これらを計算してみよう。一変数の関数 $z = h(x)$ のグラフを x -軸を軸として回転してできる回転面は、 $z = \pm\sqrt{h(x)^2 - y^2}$ と表される。今、上半分だけを考えて、 $f(x, y) = \sqrt{h(x)^2 - y^2}$ とおいて、上の公式に代入してみよう。

$$f_x = \frac{hh'}{f}, \quad f_y = -\frac{y}{f},$$

$$f_{xx} = \frac{h^3h'' - (h'^2 + hh'')y^2}{f^3}, \quad f_{xy} = \frac{hh'y}{f^3}, \quad f_{yy} = -\frac{h^2}{f^3}$$

より、

平均曲率は

$$H = \frac{hh'' - h'^2 - 1}{2h(1 + h'^2)^{3/2}}$$

となり、また Gauss 曲率は、

$$K = -\frac{h''}{h(1 + h'^2)^2}$$

となる。

一般に平均曲率が恒等的に 0 となる曲面を**極小曲面**と呼ぶ。これは十分小さい範囲では、同じ境界を持つ曲面の内、最も面積の小さい曲面となっていることによる。気泡を含まない石鹸膜は極小曲面である。

極小曲面で回転面であるものを求めてみよう。 $H = 0$ より、常微分方程式

$$h(x)h''(x) - h'(x)^2 - 1 = 0$$

を解けばよい。曲面を考えているので、 $h(x) \neq 0$ のところで考える。解 $h(x)$ が C^2 級ならば、 $h''(x) = (h'(x)^2 + 1)/h(x)$ より自動的に C^3 級となることに注意して、方程式の両辺を微分すると、

$$h'(x)h''(x) + h(x)h'''(x) - 2h'(x)h''(x) = 0$$

より、

$$\left(\frac{h''(x)}{h(x)} \right)' = \frac{h'''(x)h(x) - h''(x)h'(x)}{h(x)^2} = 0$$

よって、 $h''(x)/h(x)$ は定数とわかる。

これを c とおいて、元の方程式に代入すると、

$$ch(x)^2 - h'(x)^2 - 1 = 0$$

これは変数分離されているので、具体的に解けて、回転面に限定すると、極小曲面は懸垂面 (catenoid) すなわち懸垂線 (catenary) $z = h(x) = a \cosh((x - b)/a)$ の回転面に限ることがわかる。

問 1.6 確かめよ。

回転面に限定しなければ、極小曲面はたくさん存在する。

平均曲率が 0 でない定数のときは、気泡を含む石鹸膜の曲面となる。球面もその一つであるが、回転面に限っても、他にもいろいろある。

一般に Gauss 曲率が一定な曲面を**定曲率曲面**と呼ぶ。Gauss 曲率一定な回転面は0 の場合は円柱か円錐に限ることが、 $h''(x) = 0$ よりすぐにわかる。これは広げれば平面になる。実は Gauss 曲率は、空間内へのはめ込まれ方にはよらず、その**Riemann 計量**（各接平面での内積）のみによって定まることが知られており、くだけて言えば、長さを変えない変形では変わらないものである。

Gauss 曲率が正定数の場合は球面、負定数の場合は**擬球面** (pseudo-sphere) すなわち懸垂線の伸開線**tractrix**

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\log \tan \frac{t}{2} + \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix}$$

の回転面がその一例となることが、常微分方程式

$$h''(x) + ch(x)(1 + h'(x)^2)^2 = 0$$

を用いて示される。

問1.7 確かめよ。

擬球面を切り開いたものがずっと伸びていると思えば、**双曲平面**と言うものになる。これは曲面 $z = xy$ の原点での反り返った状態がずっと続いている曲面であるが、普通の空間には全体をはめ込むことができない。相対性理論で言うところの時空の、時間軸を回転軸とする、直角双曲線の回転面である二葉双曲面を考えれば、その一葉が、双曲平面となっている。

双曲平面は同じ点を通る平行線が無数に引ける世界である。

問1.8 極小曲面の Gauss 曲率は 0 以下であることを示せ。