数理科学特別講義I
数学特別講義G

(2021年12月6日(月)～10日(金))

レポート課題解答例

問題 1 (§4,§8)

青字のヒントにもあるように、どちらの場合も

$$g(q_1) = 1, \quad g(q_2) = i, \quad g(q_3) = -1, \quad g(q_4) = -i$$

ととればよい。

このとき、deg $g = 1$ の場合については、スライド 43 頁 5 行目の仮定 $g(z) = z$ の下では、

$$q_1 = 1, \quad q_2 = i, \quad q_3 = -1, \quad q_4 = -i$$

となり、また end の weight が全て等しいので、

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = -2a \neq 0$$

(a は実数) とおいてよい。

これらを、スライド 47 頁下から 2 行目の公式に代入すれば、

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = a,$$
$$c_1 = -a, \quad c_2 = ia, \quad c_3 = a, \quad c_4 = -ia$$

を得る。このとき、

$$\eta = \left[\sum_{j=1}^{4} \left\{ \frac{b_j}{(z-q_j)^2} + \frac{c_j}{z-q_j} \right\} \right] dz$$
$$= \left\{ \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{-a}{z-1} + \frac{a}{(z-i)^2} + \frac{ia}{z-i} \right.$$
$$\left. + \frac{a}{(z+1)^2} + \frac{a}{z+1} + \frac{a}{(z+i)^2} + \frac{-ia}{z+i} \right\} dz$$
$$= \frac{16az^2}{(z^4-1)^2} dz$$

となる。

一方、deg $g = 3$ の場合については、実現したい曲面の対称性に留意して、スライド 120 頁 2〜3 行目の公式に

$$p_1 = q_1 = 1, \quad p_2 = q_2 = i, \quad p_3 = q_3 = -1, \quad p_4 = q_4 = -i,$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b \neq 0$$

(b は実数または準虚数) を代入してみると、

$$g(z) = \frac{\frac{4b}{\sqrt{z^4-1}}}{\frac{4bz^3}{\sqrt{z^4-1}}} = \frac{1}{z^3},$$
$$\eta = -\left(\frac{4bz^3}{z^4-1}\right)^2 dz = -\frac{16b^2z^6}{(z^4-1)^2}dz$$

を得る。

このデータが実現する曲面においては、$q_j = p_j \ (j = 1, 2, 3, 4)$ より、各 end の weight は

$$w(q_j) = \sum_{k=1;k\neq j}^{4} b_j b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j}$$

$$= \sum_{k=1;k\neq j}^{4} b_j b_k \ = \ 3b^2 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

となり、全て一致する。さらに、このデータがスライド 161 頁下から 2 行目の周期条件

$$\sum_{k=1;k\neq j}^{4} b_j b_k \frac{\overline{p_j} p_k + 1}{q_k - q_j} \ = \ 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

を満たすことも、この条件が

$$\sum_{k=1;k\neq j}^{4} \frac{\overline{p_j} p_k + 1}{p_k - p_j} \ = \ 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

に帰着することから、容易に確認できる。

ちなみに、

$$p_1 = q_1 = 1, \quad p_2 = q_2 = i, \quad p_3 = q_3 = -1, \quad p_4 = q_4 = -i,$$
$$b_1 = b_3 = b \neq 0, \quad b_2 = b_4 = -b$$

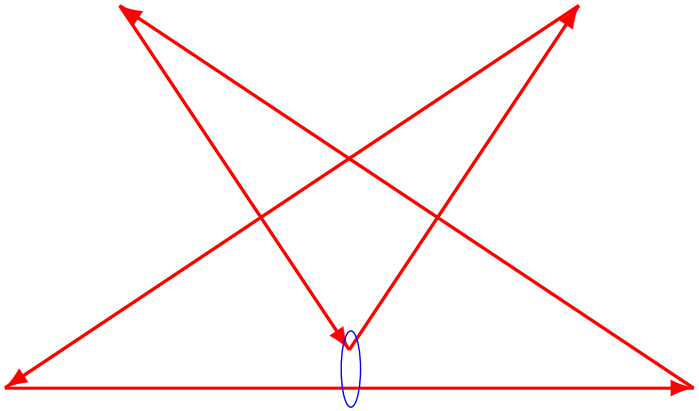
(b は実数または準虚数) を代入すると、

$$g(z) = \frac{\dfrac{4bz^2}{z^4-1}}{\dfrac{4bz}{z^4-1}} = z,$$
$$\eta = -\left(\frac{4bz}{z^4-1}\right)^2 dz = -\frac{16b^2z^2}{(z^4-1)^2}dz$$

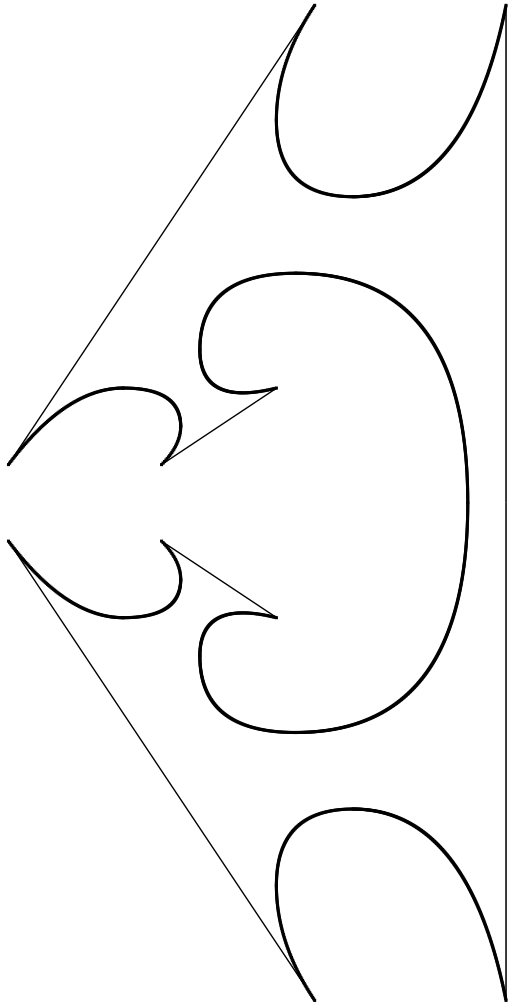
となり、deg $g = 1$ の場合と本質的に一致する。

きちんと解こうとすると、weight の条件と周期条件を、q_j, b_j 達に関する代数方程式として解くことになる。これを実行すれば、実は $\mathbf{R}^3$ の合同変換や $\hat{\mathbf{C}}$ の共形変換 (座標変換) で写り合うものを除き、これら二つの解に限ることが示される。

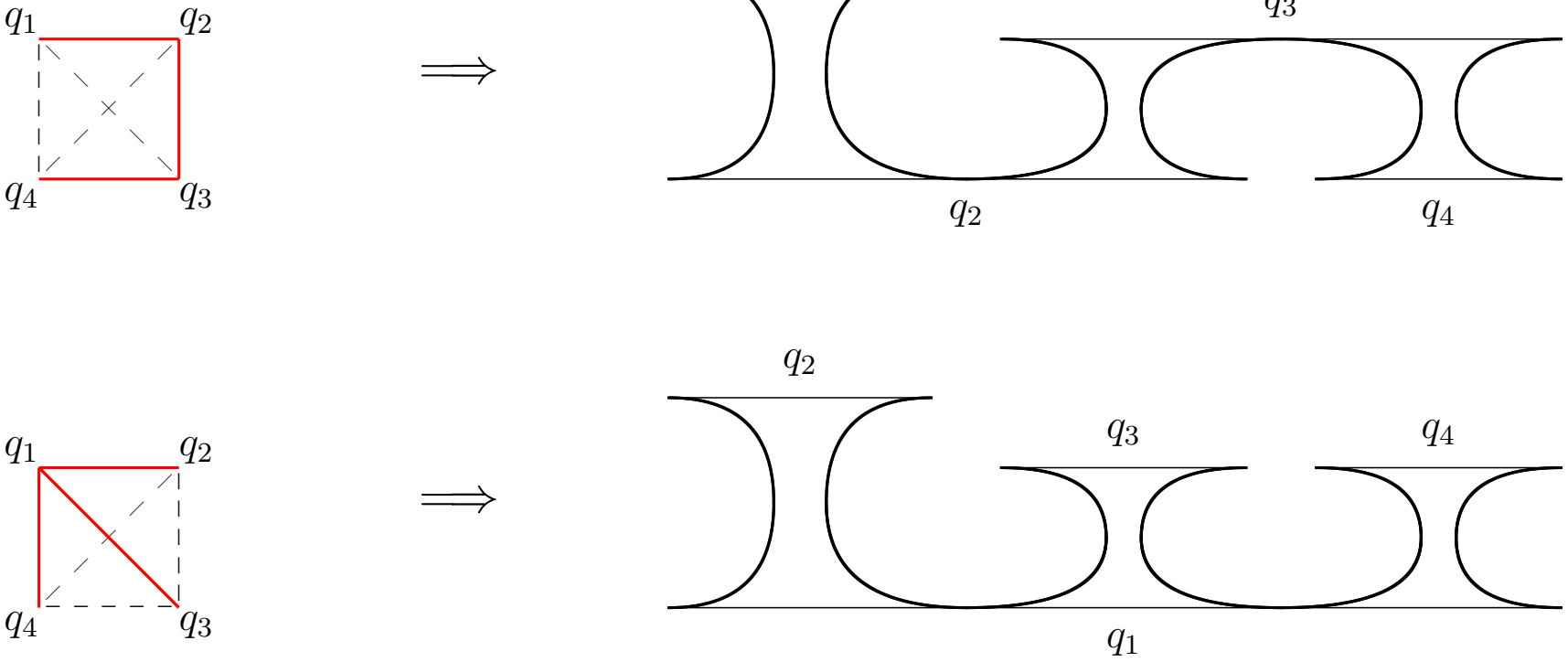
問題２ (§9)



一番下の右向きの赤いベクトルが表す end でつながってはいるものの、曲面のくびれが集中している部分が、青い楕円で囲った箇所に対応する平坦に近い部分で、大きく二つに分けられることに注意すれば、概形は次のようになる。



問題３(§10)



上の図はそれぞれ一つの例。これらの場合には、極限状態を除き、完全に平行には並ばないので、図は正確ではない。

問題４ (§13)

a, b, c, d は実数とする。

$$\frac{a+jb}{\check{z}-j}+\frac{c+jd}{\check{z}+j}$$

$$=\frac{(a+jb)(\check{z}+j)+(c+jd)(\check{z}-j)}{(\check{z}-j)(\check{z}+j)}$$

$$=\frac{\{(a+c)+j(b+d)\}\check{z}+\{(b-d)+j(a-c)\}}{\check{z}^2-1}$$

$$=\frac{(a+c+b-d)+j(b+d+a-c)}{2(\check{z}-1)}$$

$$+\frac{(a+c-b+d)+j(b+d-a+c)}{2(\check{z}+1)}$$

より、これが $\dfrac{1}{\check{z}-1}$ と一致するための条件は

$$a+b=1, \quad c-d=1, \quad a-b=0, \quad c+d=0$$

となり、

$$a+jb=\frac{1+j}{2}=\boldsymbol{e}_1, \quad c+jd=\frac{1-j}{2}=\boldsymbol{e}_2$$

を得る。

また、$\dfrac{1}{\check{z}+1}$ と一致するための条件は

$$a-b=1, \quad c+d=1, \quad a+b=0, \quad c-d=0$$

となり、

$$a+jb=\frac{1-j}{2}=\boldsymbol{e}_2, \quad c+jd=\frac{1+j}{2}=\boldsymbol{e}_1$$

を得る。

以上、まとめると、

$$\frac{1}{\check{z}-1}=\frac{\boldsymbol{e}_1}{\check{z}-j}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{\check{z}+j},$$
$$\frac{1}{\check{z}+1}=\frac{\boldsymbol{e}_2}{\check{z}-j}+\frac{\boldsymbol{e}_1}{\check{z}+j}$$

となる。