

数理科学特別講義I 数学特別講義G

(2021年12月6日(月)~10日(金))

(2022年1月31日(月)改訂版)

極小曲面のフラックスとその周辺

加藤 信

目次

§1. 序

第1部 \mathbb{R}^3 内の極小曲面の flux

§2. Enneper-Weierstrass の表現公式

§3. flux と torque の定義

§4. Rosenberg-Toubiana の仕事

§5. Pérez の仕事

§6. Traizet の仕事1(抄)

§7. Traizet の仕事2(抄)

§8. Flux 公式の逆問題

§9. Cosín-Ros の仕事 (& Pérez-Ros の仕事)

第2部 その後の研究

§10. 相対 weight を巡る話題

§A. 種数 1 の場合

§11. n -noid の index, nullity と flux

§12. catenoid 型の end を持つ向き付け不可能な極小曲面

第3部 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の平均曲率 0 曲面

§13. $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の平均曲率 0 曲面

§14. 平均曲率 0 曲面の双複素拡張

§15. 平均曲率 0 曲面の平面型 end の正則性

§16. 混合型錘状特異点

1 序

このノートは下記の講義・セミナーの原稿と講演アブストラクトを併せたものに、若干の修正を施し、2021年12月6日(月)～10日(金)に熊本大学で行なう(2回目の)集中講義のために、新たに加筆を行なったものである。

2005年度熊本大学での集中講義

2009年度山口大学でのセミナー

2011年度静岡大学での集中講義

2015年度筑波大学での集中講義

2020年度九州大学での集中講義(オンライン)

2011,2018,2019年度大阪市立大学での大学院生向け講義

2007,2020年度幾何学シンポジウムでの講演

2015,2016,2018,2019年度名城幾何学研究集会での講演

3次元 Euclid 空間内の極小曲面は、幾何学における古典的な研究対象でありながら、それについては現代においてなお重要な新事実が発見され続けている。本講義では、極小曲面とそのフラックスに関する話題、並びに Lorentz 空間内における対応物である空間的極大曲面と時間的極小曲面を併せた混合型の平均曲率 0 曲面の型変化の双複素拡張を用いた記述について解説する。

第 1 部において、紹介する予定の論文は下記の通り。 \mathbb{R}^3 内の埋め込まれた ends のみを持つ有限全曲率完備極小曲面について、特に flux 公式を始めとする均衡条件に関わる結果を扱った論文を集めてみた。

参考文献 1

Rosenberg-Toubiana: Complete minimal surfaces and minimal
herissons, J. Differential Geom. 28(1988)115-132.(Theorem 2.5)

Pérez: Riemannian bilinear relations on minimal surfaces, Math.
Ann. 310(1998)307-332.(Theorem 1)

Traizet: An embedded minimal surface with no symmetries, J.
Differential Geom. 60(2002)103-153.(Theorem 1)

Traizet: A balancing condition for weak limits of families of minimal
surfaces, Comment. Math. Helv. 79(2004)798-825. (Theorems
4-7)

Cosín-Ros: A Plateau problem at infinity for properly immersed minimal surfaces with finite total curvature, Indiana Univ. Math. J. 50(2001)847-879. (Theorem 8.1)

Pérez-Ros: The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature, Indiana Univ. Math. J. 45(1996)177-204. (Theorems 6.7, 8.1)

実は次の論文にも、かねてよりとても関心があるのだが、筆者の手には余りそうなので、手を出していない。従って、今回も全く触れない。

Weber and Wolf: Teichmüller theory and handle addition for minimal surfaces, *Annals of Math.* 156(2002)713-795.

第1部の後半から第2部にかけては、これらの論文に加えて、筆者自身の、梅原雅顕氏、山田光太郎氏、野村健二氏、室谷文祥氏、立道康介氏、濱田航平氏との共同研究、並びに個人の研究についても触れる予定である。

参考文献 2

Kato: Construction of n -end catenoids with prescribed flux, Kodai Math. J. 18(1995)86-98.

Kato-Umehara-Yamada: An inverse problem of the flux for minimal surfaces Indiana Univ. Math. J. 46(1997)529-559.

Kato-Umehara-Yamada: General existence of minimal surfaces of genus zero with catenoidal ends and prescribed flux, Comm. Anal. Geom. 8(2000)83-114.

Kato-Umehara-Yamada: General existence of minimal surfaces with prescribed flux II, Topics in complex analysis, differential geometry and mathematical physics, 116-135, World Sci. Publishing, 1997.

Kato-Nomura: On the weights of end-pairs in n -end catenoids of genus zero, *Osaka J. Math.* 41(2004)507-532.

Kato: On the weights of end-pairs in n -end catenoids of genus zero II, *Kyushu J. Math.* 61(2007)275-319.

Kato-Muroya: Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends, *Osaka J. Math.* 49(2012)931-992.

Kato-Muroya: Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends II, *Osaka J. Math.* 52(2015)307-371.

Kato-Tatemichi: Index, nullity and flux of n -noids, *Osaka J. Math.* 53(2016)101-139.

Hamada-Kato: Nonorientable minimal surfaces with catenoidal ends, *Ann. Mat. Pura Appl.* 200(2021)1573-1603.

第3部においては、国内外、特に日韓において盛んに研究がなされている Lorentz 空間内の平均曲率 0 曲面を扱う。関連する文献は多々あるが、今回は双複素拡張を用いた記述についての解説とすることで、今出水泰志氏、橋本要氏、安藤直也氏、濱田航平氏との共同研究に話題を絞ってお話したい。

参考文献 3

Imaizumi-Kato: Flux of simple ends of maximal surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$,
Hokkaido Math. J. 37(2008)561-610.

Hashimoto-Kato: Bicomplex extensions of zero mean curvature
surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$ and $\mathbf{R}^{2,2}$, J. Geom. Phys. **138** (2019), 223-240.

Ando-Hamada-Hashimoto-Kato: Regularity of ends of zero mean
curvature surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$, to appear in J. Math. Soc. Japan.

2 Enneper-Weierstrass の表現公式

F は \mathbf{R}^3 内の曲面とする。 F 上の任意の点 P に対し、 P における F の法線方向が x_3 -軸上方向に来るように、曲面を回転させたものは、 P の近傍で関数のグラフとして表される。その関数を $x_3 = f(x_1, x_2)$ とおくと、そのヘシアンつまり 2 階微分の行列

$$\text{Hess } f(P) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

の二つの固有値を主曲率、トレース /2(=固有値の平均)

$\text{tr Hess } f(P)/2$ を平均曲率、行列式(=固有値の積)

$\det \text{Hess } f(P)$ を **Gauss** 曲率、と言う。主曲率、平均曲率は、法線方向すなわち向き の定め方で、符号が変わるが、Gauss 曲率は変わらない。

各点で平均曲率が 0 であるような曲面を、極小曲面と呼ぶ。極小であるか否かは、向きの定め方によらない。極小ならば Gauss 曲率は至る所非正である。

極小曲面は局所的に、次式が定める共形はめ込みの像として表される。

$$(2.1) \quad X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\eta$$

ただしここで、 D は \mathbb{C} 内の単連結領域とし、 g は D 上の有理型関数、 η は D 上の正則 1 次微分形式とする。この公式を **Enneper-Weierstrass** の表現公式と言う。以下、記述の簡略化のため

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\eta, \quad X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi$$

と表すこともある。

g を立体射影 σ で引き戻した $G = \sigma^{-1} \circ g$ が、単位法ベクトル場を与えている。これを **Gauss** 写像と呼ぶ。曲面の Riemann 計量は $(1 + |g|^2)^2 |\eta|^2$ で与えられる。

変数 z に関して、 $X(z)$ の各成分は調和関数であることに注意しよう。

M を Riemann 面とする。 g は M 上の有理型関数、 η は M 上の正則 1 次微分形式とするとき、 M 内の任意の閉曲線 C に対し、

$$\operatorname{Re} \int_C \Phi = 0$$

すなわち

$$\overline{\int_C \eta} = \int_C g^2 \eta, \quad \overline{\int_C g \eta} = - \int_C g \eta$$

が成り立つならば、(2.1) 式が M 上で定義された、極小はめ込みを与える。

ここで、

$$\operatorname{Im} \int_C \Phi$$

の方は 0 である必要が無いことに注意しよう。実はこの値が後で重要になるのである。

K を Gauss 曲率とする。

$$TC(X) = \int_M |K| dv$$

を (絶対) 全曲率と呼ぶ。

全曲率有限な完備極小曲面は、compact Riemann 面 \bar{M} から、有限個の点 q_1, \dots, q_n を除いたもの $M = \bar{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ と共形的である (等角写像で互いに写り合う) ことが知られている。このとき、 g は \bar{M} 上の有理型関数に、 η は \bar{M} 上の有理型 1 次微分形式に拡張される。

各 q_j の近傍の像を **end** q_j と呼び、 $G(q_j) = \sigma^{-1} \circ g(q_j)$ を **end** q_j における **limit normal** と呼ぶ。

ここで、全曲率は次式で与えられる。

$$TC = \int_{\bar{M}} g^*(dv_{S^2}) = 4\pi \deg g$$

特に \bar{M} の種数 k とすると、次の **Chern-Osserman** の不等式が成り立つことが知られている。

$$TC \geq 4\pi(n + k - 1)$$

特に等号は、各 **end** q_j が埋め込まれた **end** である（すなわち各 q_j の近傍では X が単射である）ことと必要十分である。

（Gauss-Bonnet の定理と比較してみよう。）

今日まで（主に'80~'90年代）、主として全曲率が小さい（具体的には 12π 以下の）極小曲面の分類、及び埋め込みとなっている極小曲面一般の存在、非存在、具体的構成等について、盛んに研究がなされて来た。ここでいくつか例を見てみよう。

例2.1. (catenoid) 懸垂線 $x_1 = \cosh x_3$ の x_3 軸に関する回転面 (と相似な曲面)。全曲率は

$$TC = 4\pi(2 + 0 - 1) = 4\pi$$

埋め込みにより実現される (つまり自己交差の無い) 完備極小曲面で、古典的に知られていた数少ない例の一つ。また回転面で極小曲面と言えればこれしかない。なお、全曲率 4π の例は、このほかに Enneper 曲面しかないが、こちらは自己交差がある。

例2.2. (Jorge-Meeks 曲面) catenoid の半分を n 個用意し、正 n 角形の各頂点方向に向けて配置し、つないだような形状の完備極小曲面。全曲率は

$$TC = 4\pi(n + 0 - 1) = 4(n - 1)\pi$$

例2.3. (Costa 曲面) catenoid の半分を 2 個 (表裏が入れ替わるので、あくまで catenoid 1 個ではない) と平面とを平行に配置し、つないだような形状の完備極小曲面。種数 1 なので、全曲率は

$$TC = 4\pi(3 + 1 - 1) = 12\pi$$

catenoid 以来の、埋め込みにより実現される有限全曲率完備極小曲面で、その発見は曲面論を大きく発展させる契機となった。

例2.4. (Hoffman-Meeks 曲面) Costa 曲面の種数を 2 以上としたもので、全曲率は

$$TC = 4\pi(3 + k - 1) = 4(k + 2)\pi$$

$k + 1$ 次巡回群 (実はもう少し大きい群) の作用で不変。

具体的なデータは必要に応じて、後に与える。(ここでは画像は省略。ネット上に綺麗なグラフィックが溢れているので、曲面の名前で検索してみよう。)

上出の埋め込まれた end は、平面または catenoid のいずれかに漸近挙動を示す。いずれになるかは、 g が q_j で重複点であるか否かで決まる。分岐しないときが catenoid 型である。これについては、後に改めて触れる。

3 flux と torque の定義

\bar{M} 内の任意の閉曲線 C に対し、 $X(C)$ に沿う単位余法ベクトル場を n とする。

$$F(C) = \int_C n(s) ds$$

を C に関する **flux vector** (または **force**) と言い、

$$T(C) = \int_C X(s) \times n(s) ds$$

を C に関する **torque vector** と言う。これは n の取り方によって符号が変わる。

$F(C), T(C)$ は C の homology 類だけで決まる。実際 $\operatorname{div} \nabla X = \Delta X = 0$ で、さらに

$$\operatorname{div}(X \times \nabla X) = \operatorname{tr} \nabla(X \times \nabla X) = \operatorname{tr}(\nabla X \times \nabla X) + X \times \Delta X = 0.$$

より、発散公式により従う。

また $F(C)$ は曲面の平行移動にはよらない。 $T(C)$ は $F(C)$ 方向の平行移動にはよらないことも、次式よりわかる。

$$\int_C F(C) \times n(s) ds = F(C) \times \int_C n(s) ds = F(C) \times F(C) = 0.$$

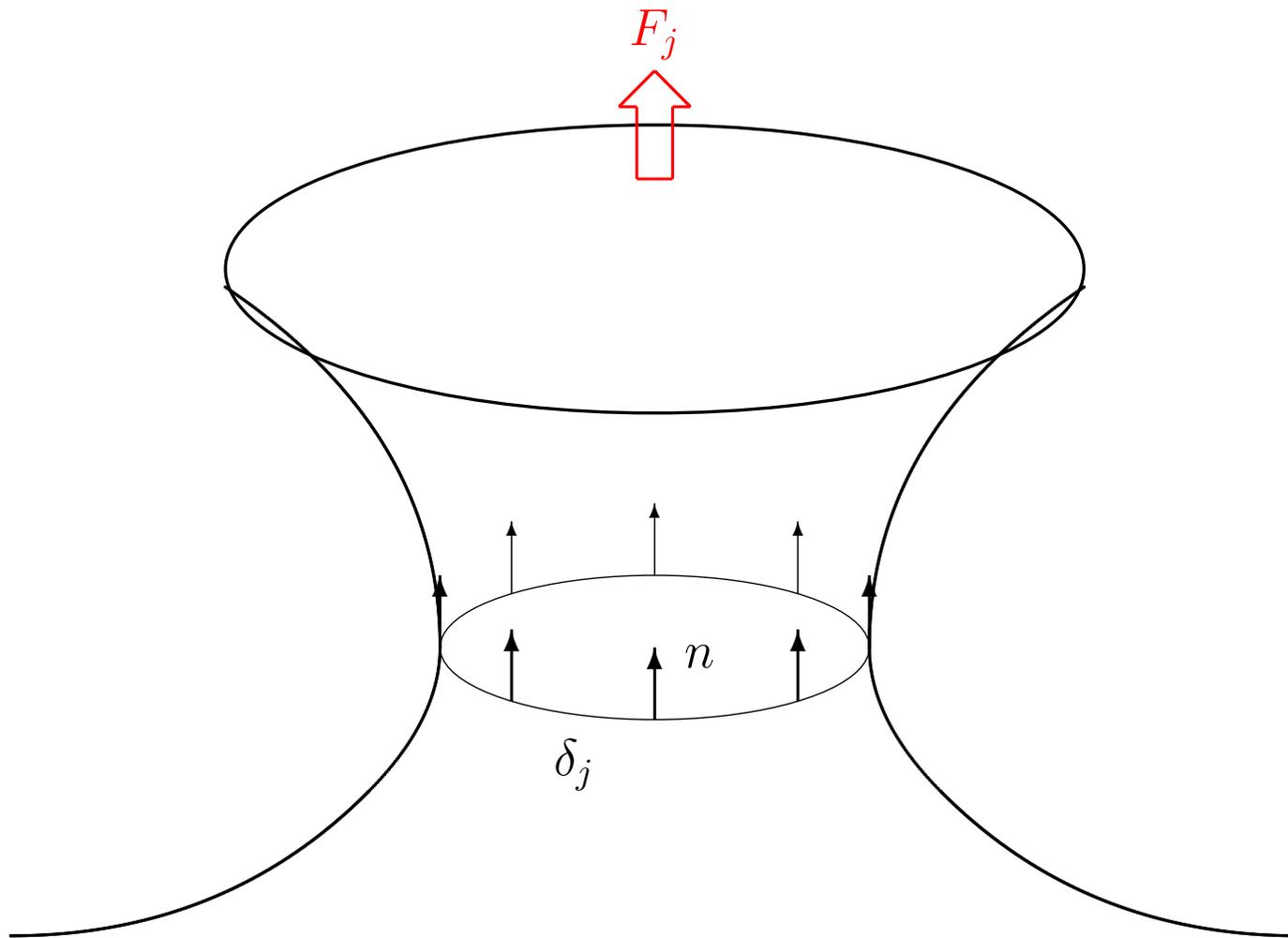
end q_j の周りを正の向きに一周する閉曲線 δ_j に対し、 $X(\delta_j)$ に沿う外向き (\bar{M} 内では内向き) 単位余法ベクトル場を n としたときの

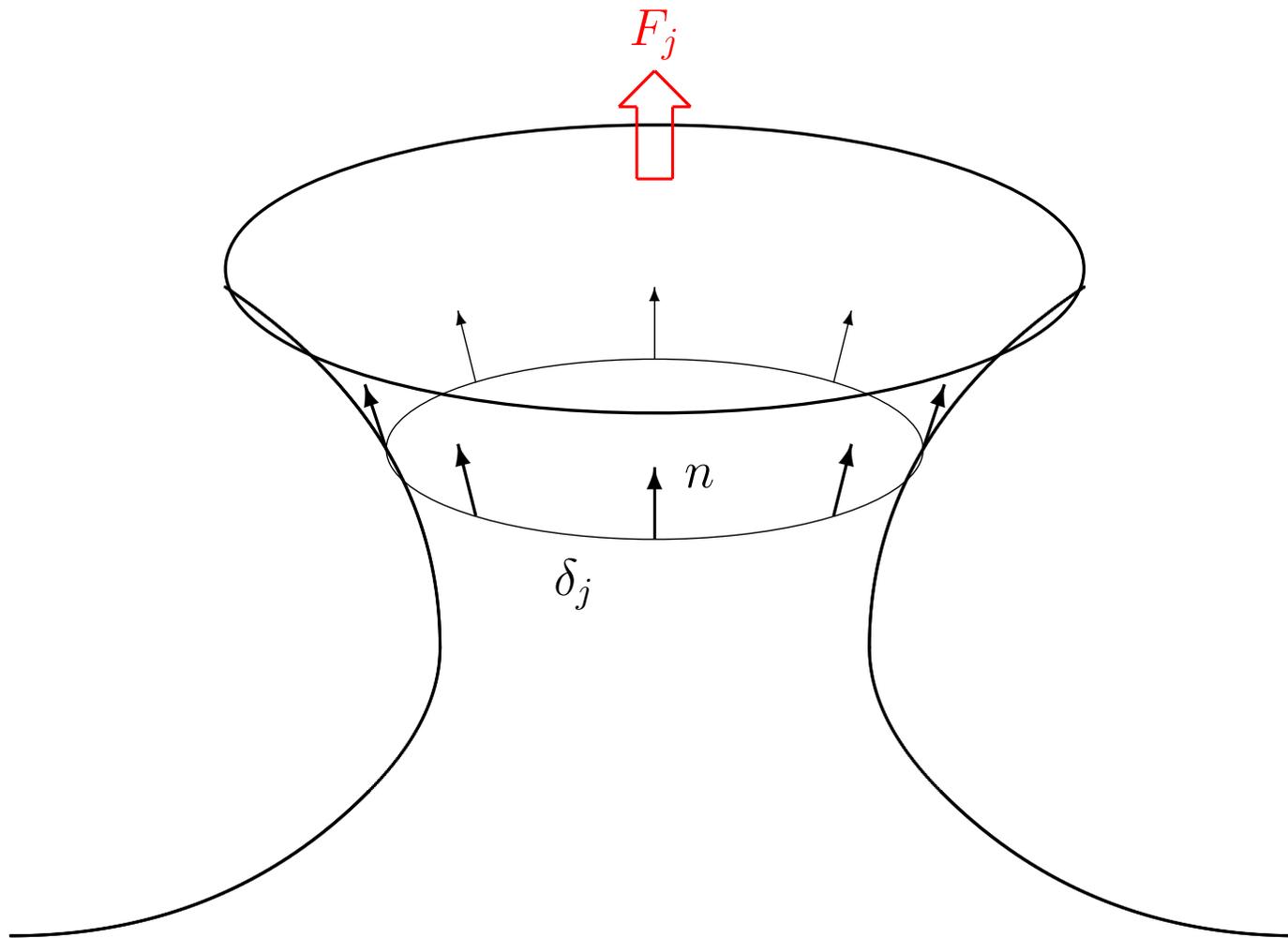
$$F_j = F(\delta_j) = \int_{\delta_j} n(s) ds$$

を end q_j の flux vector (または force) と言い、

$$T_j = T(\delta_j) = \int_{\delta_j} X(s) \times n(s) ds$$

を end q_j の torque vector と言う。特に F_j, T_j は δ_j の取り方によらない。





flux vector は実は

$$F_j = -\text{Im} \int_{\delta_j} \Phi = -2\pi \text{Re} \text{Res}_{z=q_j} \Phi$$

で与えられ、従って留数計算で求められることになる。((注) 最初の向きの定義により、紹介する論文とは符号が異なるので要注意。) このことから、留数定理によっても、 δ_j の homology 類だけで決まることはわかる。

torque vector も

$$T_j = -\text{Im} \int_{\delta_j} X \times \Phi$$

で与えられる。

さらに発散公式から、

$$\sum_{j=1}^n F_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n T_j = 0,$$

が成り立つこともわかる。これらが最初の均衡条件である。

最も簡単な例から見てみよう。

例3.1. $g = 0, \eta = dz, z_0 = 0$ で定義される極小曲面は

$$X(z) = (x, -y, 0)$$

((計算))

$$\begin{aligned} & \int_0^z (1 - 0^2, \sqrt{-1}(1 + 0^2), 2 \cdot 0) dz \\ &= \int_0^z (1, \sqrt{-1}, 0) dz = [z, \sqrt{-1}z, 0]_0^z \\ &= (z, \sqrt{-1}z, 0) = (x + \sqrt{-1}y, -y + \sqrt{-1}x, 0) \end{aligned}$$

) であり、その像は x_1x_2 -平面である。この場合 $\overline{M} = \hat{C}$ で、 $q_1 = \infty$ である。 ∞ の周りを正の向きに一周する閉曲線とは、複素平面 C 内を負の向きに一周する閉曲線であり、この場合 n は外向き単位法ベクトルである。 $X(\delta_1)$ の弧長パラメータ表示を、

$$(x(s), y(s), 0) \quad (0 \leq s \leq \ell)$$

とすれば、

$$n(s) = (-y'(s), x'(s), 0)$$

より、もう明らかであるが

$$F_1 = \int_0^\ell (-y'(s), x'(s), 0) ds = [(-y(s), x(s), C)]_0^\ell = (0, 0, 0)$$

となる。

例3.2. $g = z^{-1}$, $\eta = dz$, $z_0 = ???$ で定義される極小曲面は

$$X(z) = \left(x\left(1 + \frac{1}{r^2}\right), -y\left(1 + \frac{1}{r^2}\right), 2 \log r\right)$$

((計算))

$$\begin{aligned} & \int^z (1 - z^{-2}, \sqrt{-1}(1 + z^{-2}), 2z^{-1}) dz \\ &= (z + z^{-1}, \sqrt{-1}(z - z^{-1}), 2 \log z) \\ &= \left(x + \sqrt{-1}y + \frac{1}{r^2}(x - \sqrt{-1}y), -y + \sqrt{-1}x - \frac{1}{r^2}(y + \sqrt{-1}x), \right. \\ & \quad \left. 2 \log r + 2\sqrt{-1}\theta\right) \\ &= \left(x \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \sqrt{-1}y \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), -y \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \sqrt{-1}x \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \right. \\ & \quad \left. 2 \log r + 2\sqrt{-1}\theta\right) \end{aligned}$$

) であり、その像は catenoid

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \cosh \frac{x_3}{2}$$

である。この場合 $\overline{M} = \hat{C}$ で、 $q_1 = \infty$, $q_2 = 0$ である。 ∞ の周りを正の向きに一周する閉曲線とは、複素平面 C 内の原点 0 の周りを負の向きに一周する閉曲線であり、この場合 n は外向き単位法ベクトルであるが、最も計算しやすいのは、単位円周（像では単位円周の2倍）である。 $X(\delta_1)$ の弧長パラメータ表示を、

$$\left(2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2}, 0\right) \quad (0 \leq s \leq 4\pi)$$

とすれば、

$$n(s) = (0, 0, 1)$$

より、

$$F_1 = 4\pi(0, 0, 1)$$

となる。

また、 $X(\delta_2)$ の弧長パラメータ表示を、

$$\left(2 \cos \frac{s}{2}, -2 \sin \frac{s}{2}, 0\right) \quad (0 \leq s \leq 4\pi)$$

とすれば、

$$n(s) = (0, 0, -1)$$

より、

$$F_2 = 4\pi(0, 0, -1)$$

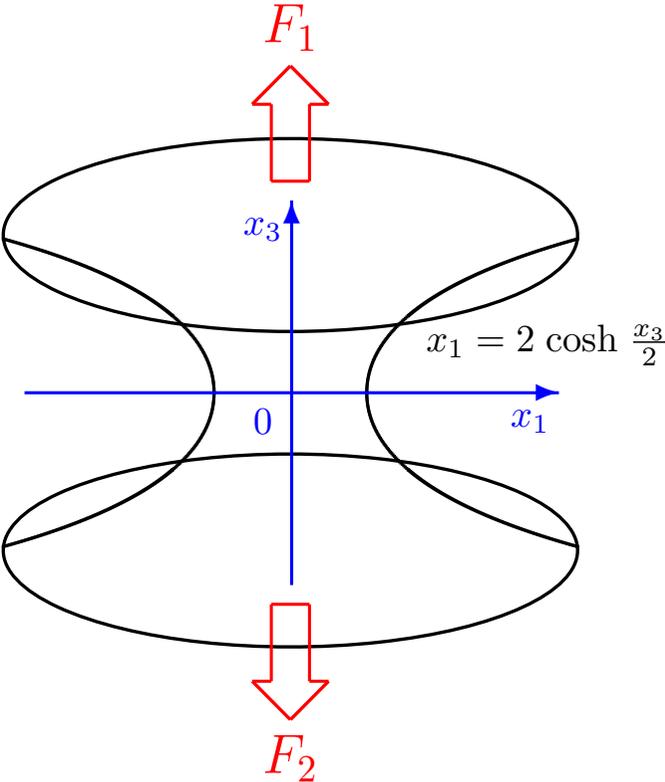
となる。((公式の確認)

$$\int_{\delta_2} \Phi = 2\pi\sqrt{-1}(0, 0, 2) = (0, 0, 4\pi\sqrt{-1})$$

$$\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, 0, 4\pi)$$

$$-\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, 0, -4\pi)$$

)



各 end の近傍で g と η をローラン展開して計算してみれば、一般に、平面型の end の flux vector は 0 であり、また、catenoid 型の end の flux vector は、limit normal に平行となることが確かめられる。また、大きさも漸近 catenoid のそれに一致する。埋め込まれていない end については、このようなことは一概に言えない。

極小曲面 X の end q_j が catenoid 型であるとする。 $g(q_j) = 0$ とするとき、 $-a = \text{Res}_{z=q_j} 2g\eta$ とし、 X の Re を取る前の q_j の近傍におけるローラン展開の定数項を (c_1, c_2, c_3) とおいて、頑張って計算すると、

$$F_j = 2\pi a(0, 0, -1) = 2\pi aG(q_j)$$

及び

$$T_j = 2\pi a(-\operatorname{Re} c_2, \operatorname{Re} c_1, 0)$$

を得る。ここで、

$$E_j = (\operatorname{Re} c_1, \operatorname{Re} c_2, 0)$$

とおくと、

$$E_j \times F_j = T_j$$

となる。ここで、直線 $E_j + \mathbf{R}F_j$ が $\operatorname{end} q_j$ の漸近 catenoid の軸となっており、この上に原点が来るように平行移動すれば、torque は 0 となる。

4 Rosenberg-Toubiana の仕事

極小曲面の構成もしくは存在証明において、避けて通れないのは次の項目である。

(1) 定義域を決める。

指定された種数と ends の個数、さらに追加の条件に対して、どの compact Riemann 面を選ぶか、さらにどこに穴を空けて ends とするか？ すなわち、曲面が属する共形類をどう選ぶか？

(2) 指定された ends を実現する。

埋め込まれた ends とするには、 ds の発散の位数が -2 となるよう、 g と η の各 ends における 位数を指定する。ends の大きさを決めるには、さらにその係数を調節する。

(3) 計量が退化しないようにする。

$\deg g$ がぎりぎりでない、分岐点が発生してしまう。大雑把に言うと、例えば η の零点が $g^2\eta$ の零点とならないためには、 g の極が η の零点である必要があるが、 g の degree が小さいと、これができない。実はこれが結構面倒。

(4) そして、そもそも曲面が well-defined

各閉曲線に対し、積分の実部が消えている。これは ends 周りでは留数が実数であることに相当している。その他 1 次 homology 群の生成元について、周期が消えていることが必要なので、一般には種数が大きいほど確認事項が増えるし、対称性が高いほど自然にクリアされやすい傾向がある。

このことを、あまり新しい論文ではないが、極小 herisson に関する Plateau 問題を扱った、Rosenberg-Toubiana の結果を例に見てみよう。

どう言う論文か、簡単に紹介しておく、全曲率 4π の完備極小曲面を極小 herisson と呼ぶ。これはすなわち $\deg g = 1$ ということ、 g 自身を座標にとりまえば、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上で定義された $g(z) = z$ を満たす完備極小曲面ということであり、catenoid と Enneper 曲面以外は必然的に分岐点を持つ。

一般に二つの完備極小曲面 X_1, X_2 があったとする。今、 $\hat{C} \ni z$ に対し、 $g_1 = z$ となる X_1 の点全てと $g_2 = z$ となる X_2 の点全ての座標を足し合わせたものに対応させる写像を考える。それらの点が g_1, g_2 の分岐点でないような一般的な点においては、 g_1, g_2 が局所座標としてとれて、その近傍においては、 X_1, X_2 共に、 $g(z) = z$ を満たす曲面となっており、結局上記の和は η 達の和によって実現される。従って、この和は極小 herisson を与える。

特に、極小 herisson 全体は、この演算によって群となる。と言うわけで、極小 herisson についていろいろ調べているのだが、その中に、次のような定理がある。

定理 4.1. 任意の $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{S}^2$ に対し、 $G(q_j) = v_j$ を満たす n 個の catenoid 型 ends を持つ極小 herisson が存在するための必要十分条件は、 $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ を満たす $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ が存在することである。(と書かれているが、実際にはもっと強く、大きさ a_1, \dots, a_n の ends が実現されることを示している。)

(証明) 必要なことは flux 公式から直ちにわかる。十分であることを示す。

この定理では、compact Riemann 面としては、Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ を選んでいる。

$g(z) = z$ を仮定してよい。すると、 $q_j = \sigma(v_j)$ でなければならぬ。と言うわけで (1) は自動的に決まる。それと同時に (3) は始めからあきらめている。

$$\eta = \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j}{z - q_j} \right\} + f(z) \right] dz$$

但し $f(z)$ は正則関数とする。このように選んだのは、(2) のためである。

ここで、

$$ds = (1 + |g|^2)|\eta| \geq \max\{|\eta|, |g^2\eta|\}$$

で、

$$\begin{aligned}\eta &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j}{z - q_j} \right\} + f(z) \right] dz \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j z}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j q_j}{z - q_j} \right\} + \sum_{j=1}^n c_j + z f(z) \right] \frac{dz}{z}\end{aligned}$$

が $z = \infty$ で発散しないためには、

$$\sum_{j=1}^n c_j = 0, \quad f(z) = 0$$

でなければならない。((注) $z^{-1} = w$ とおけば $-z^{-2}dz = dw$.
よって $\frac{dz}{z} = -zdw = -\frac{dw}{w}$ より、 $\frac{dz}{z}$ は $z = \infty$ で 1 位の極を持つ。)

$$\eta = \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j}{z - q_j} \right\} \right] dz$$

より、

$$\begin{aligned} z\eta &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j z}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j z}{z - q_j} \right\} \right] dz \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j}{z - q_j} + \frac{b_j q_j}{(z - q_j)^2} + c_j + \frac{c_j q_j}{z - q_j} \right\} \right] dz, \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} z^2\eta &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j z^2}{(z - q_j)^2} + \frac{c_j z^2}{z - q_j} \right\} \right] dz \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ b_j + \frac{2b_j q_j}{z - q_j} + \frac{b_j q_j^2}{(z - q_j)^2} + c_j(z - q_j) + 2c_j q_j + \frac{c_j q_j^2}{z - q_j} \right\} \right] dz \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{b_j q_j^2}{(z - q_j)^2} + \frac{(2b_j q_j + c_j q_j^2) q_j}{z - q_j} \right\} + \sum_{j=1}^n (2b_j q_j + c_j q_j^2) \right] dz \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n (b_j + c_j q_j) z + \sum_{j=1}^n c_j z^2 \right] \frac{dz}{z}$$

が $z = \infty$ で発散しないためには、

$$\sum_{j=1}^n (2b_j q_j + c_j q_j^2) = 0, \quad \sum_{j=1}^n (b_j + c_j q_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n c_j = 0$$

でなければならない。

(2) における ends の大きさの指定と、(4) における well-defined を両立させるためには、次の連立方程式を満たせばよい。留数が実数となることが、well-defined に対応し、実数の値が ends の大きさを決める。 $H_1(\hat{\mathbf{C}}) = \{0\}$ なので、他に確認事項は無い。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{q_j}(1 - z^2)\eta &= c_j - (2b_jq_j + c_jq_j^2) \\
&= -b_j\{2q_j - (1 - q_j^2)c_j/b_j\} = a_j \cdot \frac{2\operatorname{Re} q_j}{|q_j|^2 + 1} \\
\operatorname{Res}_{q_j}\sqrt{-1}(1 + z^2)\eta &= \sqrt{-1}\{c_j + (2b_jq_j + c_jq_j^2)\} \\
&= \sqrt{-1}b_j\{2q_j + (1 + q_j^2)c_j/b_j\} = a_j \cdot \frac{2\operatorname{Im} q_j}{|q_j|^2 + 1} \\
\operatorname{Res}_{q_j}2z\eta &= 2(b_j + c_jq_j) \\
&= 2b_j\{1 + q_jc_j/b_j\} = a_j \cdot \frac{|q_j|^2 - 1}{|q_j|^2 + 1}
\end{aligned}$$

これを b_j, c_j について解くと、

$$b_j = -\frac{a_j}{2}, \quad c_j = \frac{a_j\bar{q}_j}{|q_j|^2 + 1}$$

を得る。

(証明終)

ここで、上の 3 条件は

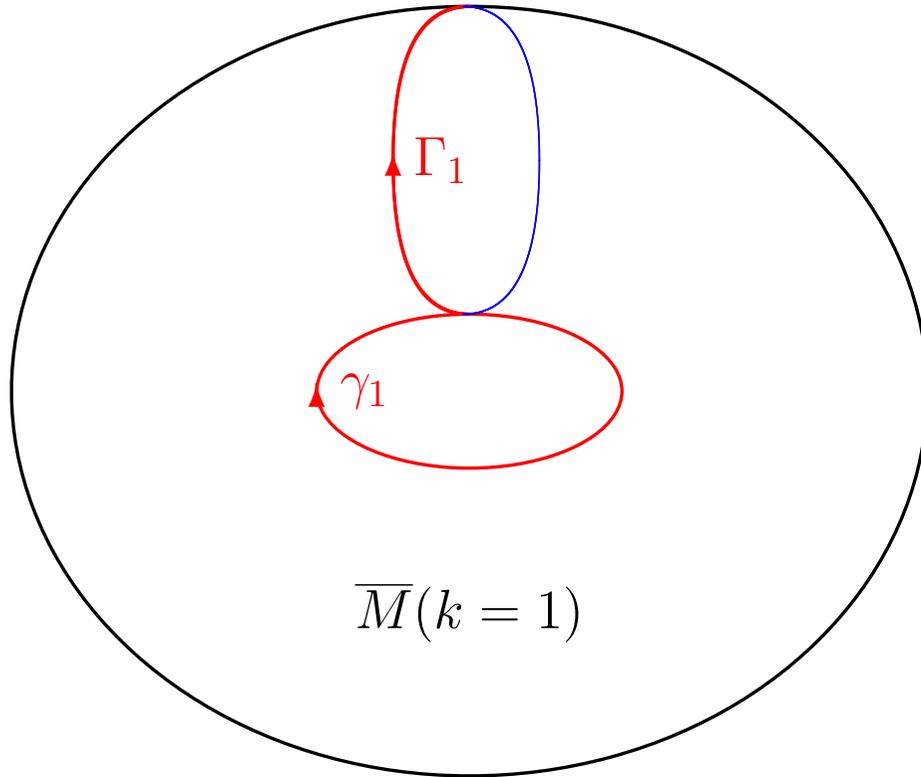
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \left(-a_j q_j + \frac{a_j |q_j|^2 q_j}{|q_j|^2 + 1} \right) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{-q_j}{|q_j|^2 + 1} \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \left(-\frac{a_j}{2} + \frac{a_j |q_j|^2}{|q_j|^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j \frac{|q_j|^2 - 1}{|q_j|^2 + 1} \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{a_j \bar{q}_j}{|q_j|^2 + 1} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\bar{q}_j}{|q_j|^2 + 1} \end{aligned}$$

で、flux 公式そのものに他ならない。これは ∞ に余分な end が発生しないことを条件に課していることと同等であると考えられる。

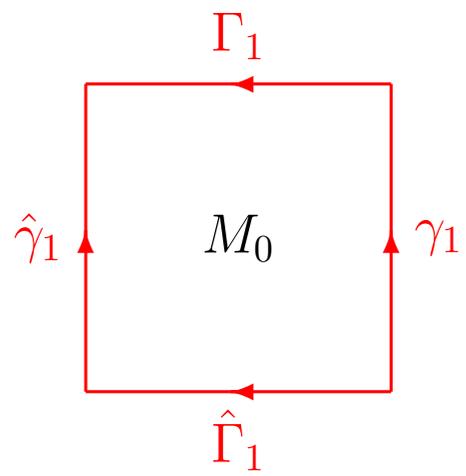
5 Pérez の仕事

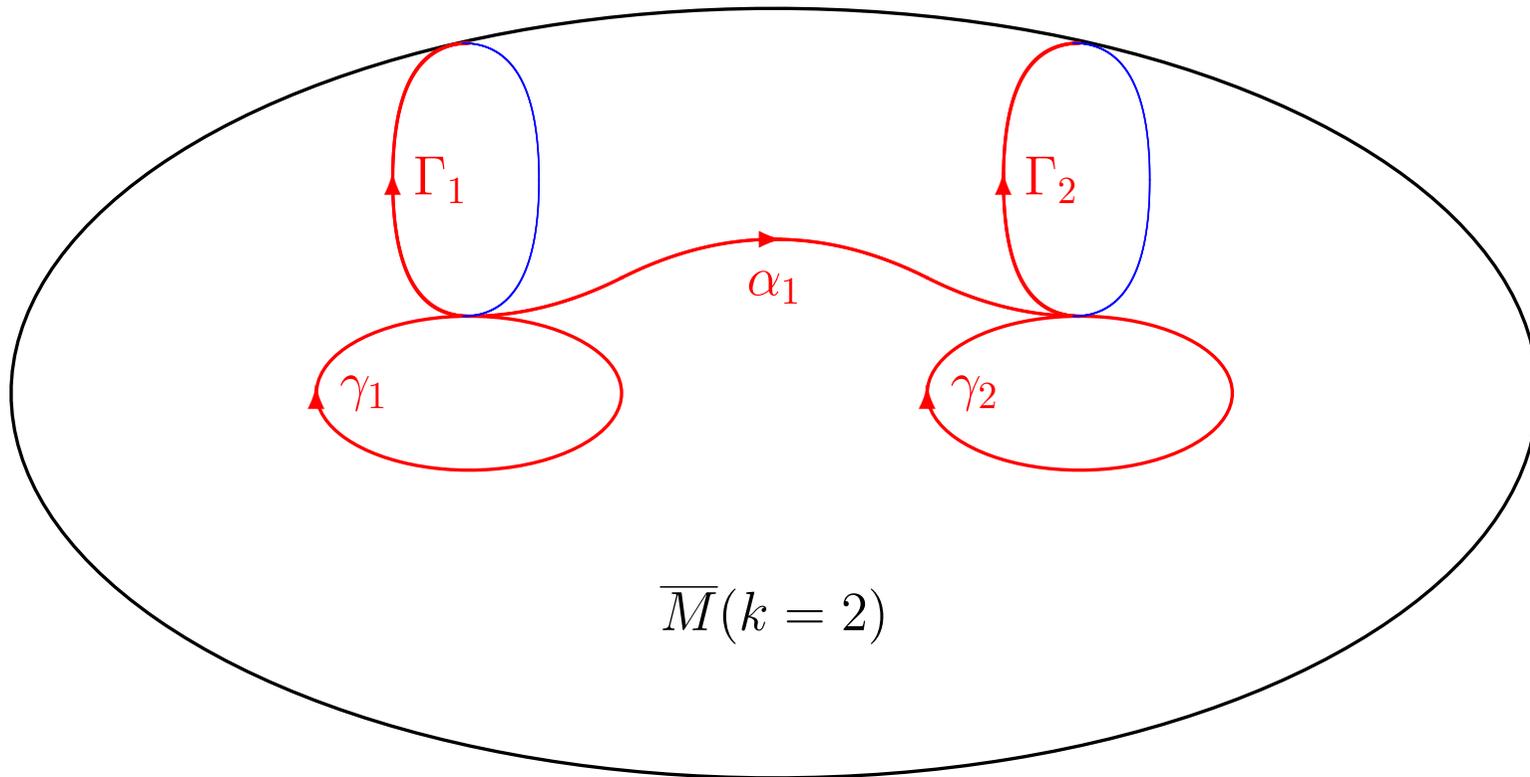
全曲率有限な極小曲面が埋め込まれているためには、全ての ends (の limit normals) が平行でなければならない。しかも、その大きさが並ぶ順に単調である必要がある。そこで、平行な ends を持つ曲面に関する研究が行われた。

\overline{M} を種数 k の compact Riemann 面とし、 γ_i, Γ_i ($i = 1, \dots, k$) を \overline{M} の 1 次 homology 群の生成元で、添字 i が共通のもののみ 1 点で交わるものとする。 α_i ($i = 1, \dots, k-1$) を、 $\gamma_i \cap \Gamma_i$ と $\gamma_{i+1} \cap \Gamma_{i+1}$ とを結ぶ曲線とする。これら全てが互いに交わらないものとするれば、 $M_0 := \overline{M} \setminus \{(\cup_{i=1}^k \gamma_i) \cup (\cup_{i=1}^k \Gamma_i) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} \alpha_i)\}$ は単連結な Riemann 面となる。

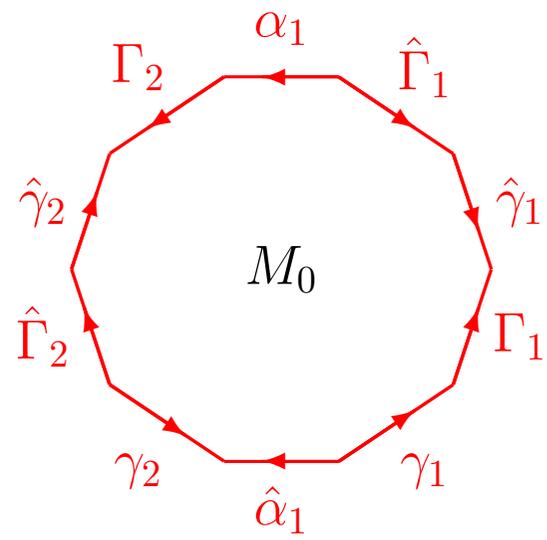


$\overline{M}(k=1)$





$\overline{M}(k=2)$



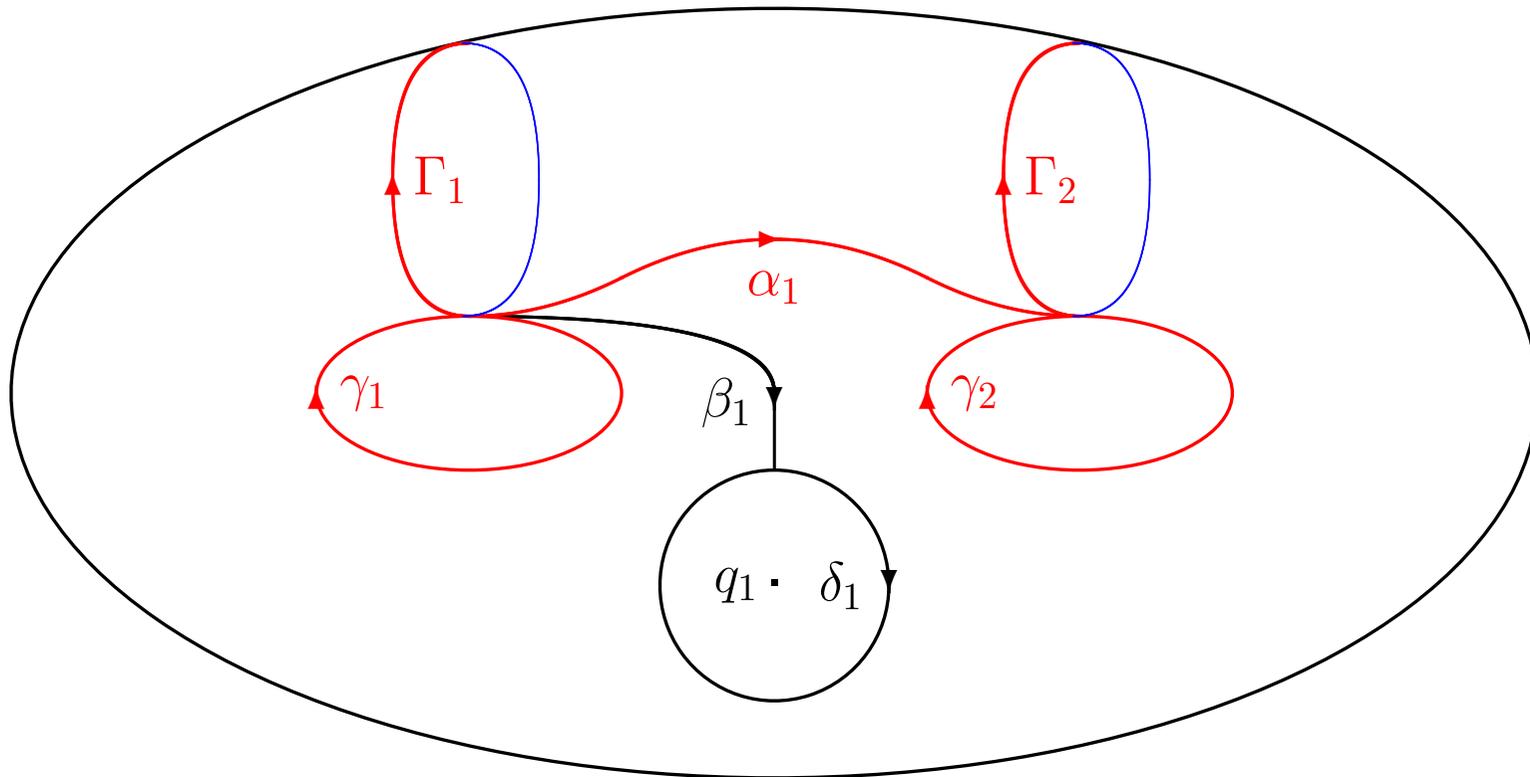
ϕ_a, ϕ_b は \overline{M} 上の有理型 1 次微分形式、 q_j ($j = 1, \dots, r$) をこれらの少なくとも一方についての留数を持つ極、 q_j ($j = r + 1, \dots, n$) を残りの (すなわち留数を持たない) 極とする。 δ_j ($j = 1, \dots, n$) を q_j の周りを負の向きに回る閉曲線とし、また q_0 を ∂M_0 上の定点、 β_j ($j = 1, \dots, r$) を q_0 と δ_j とを結ぶ曲線とする。 これらもまた全てが互いに交わらないものとするれば、

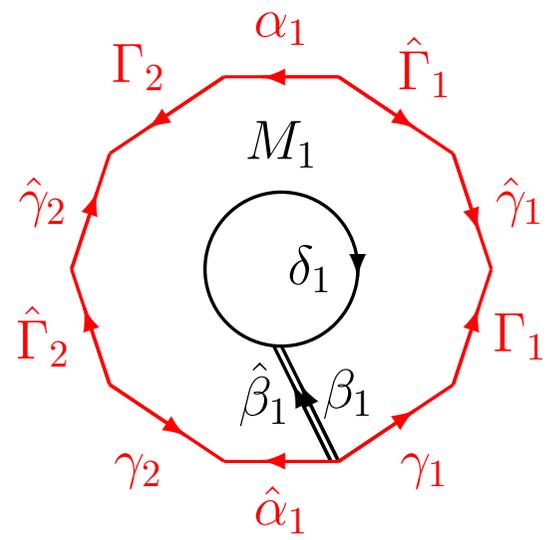
$$M_1 := M_0 \setminus \{(\cup_{j=1}^r \partial^{-1} \delta_j) \cup (\cup_{j=1}^r \beta_j)\}$$

もまた単連結な Riemann 面となる。

$$M_2 := M_1 \setminus (\cup_{j=r+1}^n \partial^{-1} \delta_j)$$

とおく。





ここで ϕ_a は M_1 上留数を持たないので、 $dh_a = \phi_a$ をみたく
 M_1 上有理型、 M_2 上正則な関数 h_a が存在する。ここで $h_a \phi_b$
 は M_2 上正則なので、

$$\int_{\partial M_2} h_a \phi_b = 0$$

が成り立つ。

ここで、

$$\partial M_2 = \sum_{j=1}^n \delta_j + \sum_{i=1}^k (\gamma_i - \hat{\gamma}_i + \Gamma_i - \hat{\Gamma}_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i - \hat{\alpha}_i) + \sum_{j=1}^r (\beta_j - \hat{\beta}_j)$$

である。($\hat{\gamma}_i$ は γ_i と同じ曲線) 今 $f : \gamma_i \rightarrow \hat{\gamma}_i$ を、向きを変える
 微分同相写像で、 γ_i 上の各点を $\hat{\gamma}_i$ 上の同じ点に写すものと
 すると、 γ_i 上で $f^* \phi_b = \phi_b$ であり、さらに次が成り立つ。

$\forall x \in \gamma_i$ に対し $h_a \circ f(x) = h_a(x) + \int_{\Gamma_i} \phi_a$
($\iff [h_a(x)]_x^{f(x)} = \int_{\Gamma_i} dh_a$) より、

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}_i} h_a \phi_b &= \int_{\gamma_i} f^*(h_a \phi_b) = \int_{\gamma_i} h_a \circ f f^* \phi_b \\ &= \int_{\gamma_i} \left(h_a + \int_{\Gamma_i} \phi_a \right) \phi_b = \int_{\gamma_i} h_a \phi_b + \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b \end{aligned}$$

よって、

$$\int_{\gamma_i - \hat{\gamma}_i} h_a \phi_b = - \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b$$

$f : \Gamma_i \rightarrow \hat{\Gamma}_i$ をとると、 $\forall x \in \Gamma_i$ に対し

$$h_a \circ f(x) = h_a(x) - \int_{\gamma_i} \phi_a \quad (\iff [h_a(x)]_x^{f(x)} = - \int_{\gamma_i} dh_a) \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Gamma}_i} h_a \phi_b &= \int_{\Gamma_i} f^*(h_a \phi_b) = \int_{\Gamma_i} h_a \circ f f^* \phi_b \\ &= \int_{\Gamma_i} \left(h_a - \int_{\gamma_i} \phi_a \right) \phi_b = \int_{\Gamma_i} h_a \phi_b - \int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b \end{aligned}$$

よって、

$$\int_{\Gamma_i - \hat{\Gamma}_i} h_a \phi_b = \int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b$$

$f : \alpha_i \rightarrow \hat{\alpha}_i$ をとると、 $\forall x \in \alpha_i$ に対し $h_a \circ f(x) = h_a(x)$
($\iff [h_a(x)]_x^{f(x)} = 0$) より、

$$\int_{\hat{\alpha}_i} h_a \phi_b = \int_{\alpha_i} h_a \phi_b$$

よって、

$$\int_{\alpha_i - \hat{\alpha}_i} h_a \phi_b = 0$$

$f : \beta_j \rightarrow \hat{\beta}_j$ をとると、 $\forall x \in \beta_j$ に対し

$$h_a \circ f(x) = h_a(x) - \int_{\delta_j} \phi_a \quad (\iff [h_a(x)]_x^{f(x)} = - \int_{\delta_j} dh_a) \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\beta}_j} h_a \phi_b &= \int_{\beta_j} f^*(h_a \phi_b) = \int_{\beta_j} h_a \circ f f^* \phi_b \\ &= \int_{\beta_j} \left(h_a - \int_{\beta_j} \phi_a \right) \phi_b = \int_{\beta_j} h_a \phi_b - \int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b \end{aligned}$$

よって、

$$\int_{\beta_j - \hat{\beta}_j} h_a \phi_b = \int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b$$

これらを併せて、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M_2} h_a \phi_b \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\delta_j} h_a \phi_b + \sum_{i=1}^k \left\{ - \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b + \int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b + 0 \right\} + \sum_{j=1}^r \int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b \end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \int_{\Gamma_i} \phi_a \int_{\gamma_i} \phi_b - \int_{\gamma_i} \phi_a \int_{\Gamma_i} \phi_b \right\} = \sum_{j=1}^r \int_{\delta_j} \phi_a \int_{\beta_j} \phi_b + \sum_{j=1}^n \int_{\delta_j} h_a \phi_b$$

を得る。

この公式を **Riemann bilinear relation** と言う (らしい)。

ここで、この公式の実部をとると、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^k \left\{ \operatorname{Re} \int_{\Gamma_i} \phi_a \operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \phi_b - \operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_b \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \phi_a \operatorname{Re} \int_{\Gamma_i} \phi_b + \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_b \right\} \\
 & = \sum_{j=1}^r \left\{ \operatorname{Re} \int_{\delta_j} \phi_a \operatorname{Re} \int_{\beta_j} \phi_b - \operatorname{Im} \int_{\delta_j} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\beta_j} \phi_b \right\} + \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\delta_j} h_a \phi_b
 \end{aligned}$$

さて、well-defined な極小曲面においては、 ϕ_a ($a = 1, 2, 3$) のいずれに対しても、

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \phi_a = \operatorname{Re} \int_{\Gamma_i} \phi_a = \operatorname{Re} \int_{\delta_j} \phi_a = 0 \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n)$$

よって、 ϕ_a, ϕ_b ($a \neq b$) がいずれの場合でも、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left\{ -\operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_b + \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_b \right\} \\ &= \sum_{j=1}^r \left\{ -\operatorname{Im} \int_{\delta_j} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\beta_j} \phi_b \right\} + \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\delta_j} h_a \phi_b \end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで平面型の end については、

$$\operatorname{Im} \int_{\delta_j} \phi_a = 0 \quad (j = r + 1, \dots, n)$$

である。さらに、catenoid 型の end q_j 全て ($j = 1, \dots, r$) について、 $g(q_j) = 0$ または ∞ の場合には、 ϕ_a ($a = 1, 2$) のいずれに対しても、

$$\operatorname{Im} \int_{\delta_j} \phi_a = 0 \quad (j = r + 1, \dots, n)$$

$a \neq b$ である限り ϕ_a, ϕ_b の一方は、これに該当するようとれるので、結局

$$\sum_{i=1}^k \left\{ -\operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_b + \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \phi_a \operatorname{Im} \int_{\Gamma_i} \phi_b \right\} = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\delta_j} h_a \phi_b$$

が成立する。

さて、 X は全ての ends が平行な極小曲面とする。 $g(q_j) = 0$ または ∞ ($j = 1, \dots, n$) となるよう回転した後、§3 の公式を適用すると、

$$F_j = \mp 2\pi a_j \mathbf{e}_3$$

$$0 = \sum_{j=1}^n F_j = 2\pi \mathbf{e}_3 \left\{ -\sum_0 a_j + \sum_\infty a_j \right\}$$

$$\boxed{\Sigma_0 a_j - \Sigma_\infty a_j = 0}$$

$$T_j = E_j \times F_j = E_j \times (\mp 2\pi a_j \mathbf{e}_3)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n T_j = 2\pi \left\{ -\sum_0 a_j E_j + \sum_\infty a_j E_j \right\} \times \mathbf{e}_3$$

$$\boxed{\Sigma_0 a_j E_j - \Sigma_\infty a_j E_j = 0}$$

上の□より、これが平行移動で不変な式であることが確認できる。さらに、上の公式を適用すると、次の等式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k F(\gamma_i) \times F(\Gamma_i) &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \int_{\delta_j} (h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} \operatorname{Res}_{z=q_j} (h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2)\end{aligned}$$

ただし (h_1, h_2, h_3) は X の Re を取る前の式である。

ところが、catenoid 型の end に対しては、

$$E_j^* = (\text{Im } c_1, \text{Im } c_2, 0)$$

とおくならば、

$$2\pi \text{Im Res}_{z=q_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = E_j^* \times F_j + \frac{a_j}{2} F_j$$

が成り立ち、一方、平面型 end については、

$$2\pi \text{Re Res}_{z=q_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = T_j$$

及び、

$$2\pi \text{Im Res}_{z=q_j}(h_2\phi_3, -h_1\phi_3, h_1\phi_2) = T_j \times G(q_j)$$

が成り立つ。これらはいずれも、 g と η をローラン展開して計算などすれば、(何とか) 示せる。

よって、

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma_i) \times F(\Gamma_i) = - \sum_{\text{平面型 ends}} T_j \times G(q_j) - \sum_{\text{catenoid 型 ends}} \left(E_j^* \times F_j + \frac{a_j}{2} F_j \right)$$

を得る。特にこれから、次の公式を得る。

定理 5.1 X は全ての ends が \mathbf{e}_3 と平行な極小曲面とする。

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^k F(\gamma_i) \times F(\Gamma_i), \mathbf{e}_3 \right\rangle &= - \sum_{\text{catenoid 型 ends}} \frac{a_j}{2} \langle F_j, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= \left(\sum_{g(q_j)=0} a_j^2 - \sum_{g(q_j)=\infty} a_j^2 \right) \pi \end{aligned}$$

$$(F_j = 2\pi a_j(\mp \mathbf{e}_3))$$

flux vectors

$$F(\gamma_i), F(\Gamma_i) \quad (i = 1, \dots, k), \quad F_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

の張る空間の次元を **flux の rank** と呼ぶことにする。埋め込みで flux の rank が 0 ならば平面、1 ならば catenoid であることが知られている。上の公式の系として、さらに次の事実が得られる。

系5.2 catenoid 型の end を含み（平面以外の埋め込みなら常に成立）かつ flux の rank が 2 以下ならば、

$$\sum_{g(q_j)=0} a_j^2 = \sum_{g(q_j)=\infty} a_j^2$$

(証明) catenoid 型の end を含むので、 F_j の中に e_3 と平行な物が少なくとも一つ存在し、rank が 2 以下なので、全ての flux vectors が x_3 -軸を含むある平面に含まれる。よって、定理の左辺は 0 となる。 (証明終)

系5.3 埋め込みで奇数個の ends を持ちかつ flux の rank が 2 ならば、catenoid 型で同じ大きさの ends が 2 個ずつ組みになっている。(§7 で言う所の分離されていない ends である。)

(証明) 埋め込みのとき、 $(-1)^j a_j$ の大きさの順に $G(q_j)$ は交互に入れ替わり、ends は奇数個なので、正負それぞれの最大絶対値のものは、同じ向きを持つため系 5.2 の等式で同じ側に来る。正負共に以下左辺と右辺交互に現れ順に小さくなるので、奇数番目と偶数番目が一致しないと、等式が成立しない。

(証明終)

系5.4 埋め込みで3個の ends を持つならば、flux の rank は3である。

(証明) flux の rank が2ならば、系5.3より、catenoid型で同じ大きさの ends が2個ずつ組みになっている。ということは、正負それぞれ最低2個ずつ必要となり、ends が3個はあり得ない。 (証明終)

実際には、種数1以上の埋め込みで、flux の rank が2はあり得ないのではないかと思われる。

例5.5(KUY '97) 種数 0 で $n = 4$ のとき、 0 と ∞ が 1 個と 3 個のみ OK で、系 5.2 の条件 ($a_1 = a_2 + a_3 + a_4$, $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$) が必要十分である。種数 0 で ends が 4 個の例は次で全て。

$$g(z) = -\frac{1}{tf(z)}, \quad \eta = -t(f(z))^2 dz, \quad f(z) = \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z-1} + \frac{a_4}{z + \frac{a_4}{a_3}}$$

種数 0 で $n \geq 3$ のとき、 0 と ∞ が 2 個と $n - 2$ 個は存在しない。よって、系 5.2 の条件は、一般には十分条件ではない。

Pérez は、この後、周期性を持つ極小曲面 (Riemann の極小曲面、Shark の極小曲面など) について、その特徴付けなどを行っているが、今回の主題からは外れるので、これ以上は触れないことにする。

6 Traizet の仕事1(抄)

以下、都合により種数は G , ends の個数は N で表す。

全曲率有限な完備極小曲面は平面、catenoid の他に久しく知られていなかった。Costa によって発見された第3の例は、正方形の対辺を同一視して得られる T^2 から3点を除いた Riemann 面上で定義されたもので、 D_2 の作用で不変なものであった。

Hoffman-Meeks はこれらを一般化し、まず種数 $G \geq 2$ の Riemann 面から3点を除いた所で定義され、 D_{G-1} の作用で不変な例を構成して見せた。彼らはその後も、偶数種数で4点を除いた例など、次々に新しい例を構成していった。

それらの族の極限として、handle の列の部分が Sherk の saddle tower に収束することに着目した Kapouleas は、同じ軸を持ついくつかの平面もしくは catenoids の組に、saddle tower を張り付けた極限状態に陰関数定理を用いて、はるかに多くの例の存在を一時に示した。しかし、これらの例は基本的に、何らかの対称性を仮定したものであった。

一方、 T^2 から 3 点を除いた所で定義される極小埋め込みは Costa により分類され、一般には必ずしも D_2 の作用で不変である必要はなく、上と下の handle の取り付け位置の異なる 1 パラメーター族を作っていることが明らかになった。この族の極限においては、必ずしも同じ軸を持たないいくつかの平面もしくは catenoids が、十分離れた所で小さな handle によって結ばれている状態となる。ここで、既知の事実とそれに関わる予想について、もう一度整理しておこう。 $\mathcal{M}(G, N)$ を種数 G の埋め込まれた N -noids の空間（を相似変換群で割った商空間）とし、 $\mathcal{M}(G, 3) \supset \mathcal{C}(G)$ を種数 G の Costa-Hoffman-Meeks の 1-parameter 族とする。

事实

(1) $\mathcal{M}(0, 1) = \{\text{平面}\}$.

(2) $\mathcal{M}(0, 2) = \{\text{catenoid}\}$.

(3) $\mathcal{M}(0, N) = \emptyset$ ($\forall N \geq 3$) (Lopez-Ros).

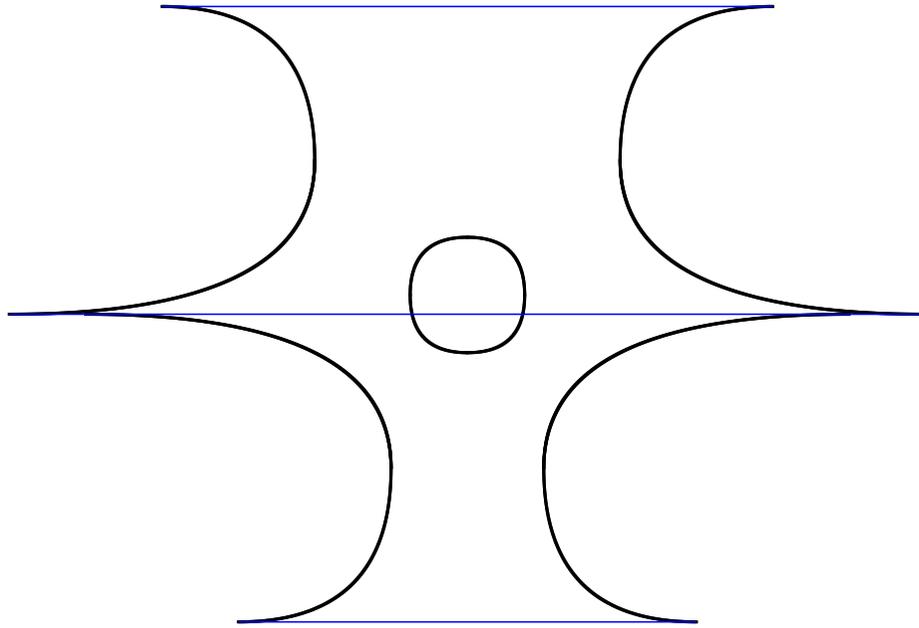
(4) $\mathcal{M}(G, 2) = \emptyset$ ($\forall G \geq 1$) (Schoen).

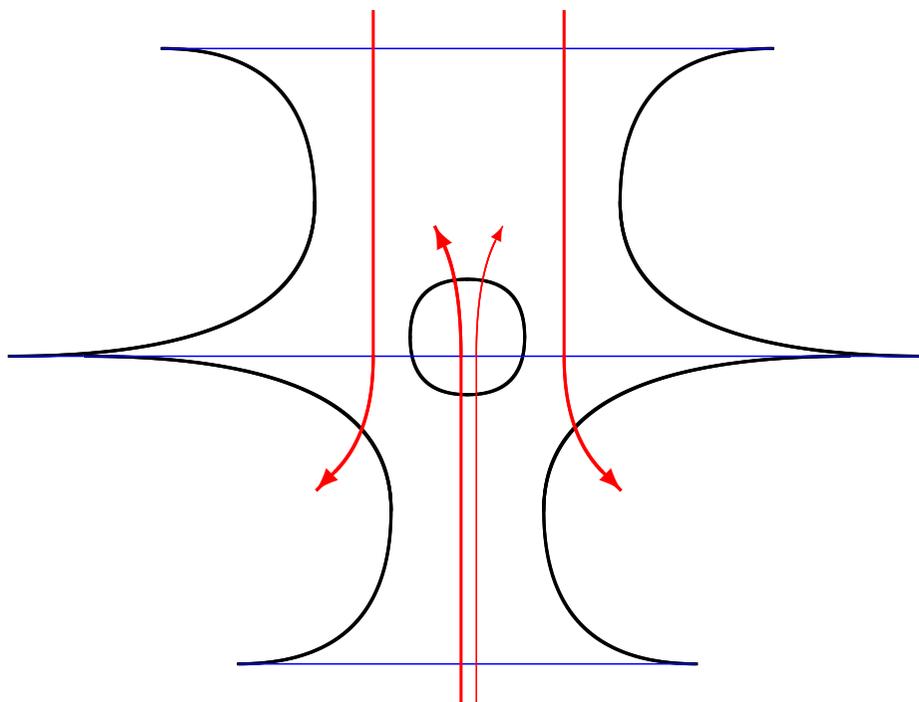
(5) $\mathcal{M}(1, 3) = \mathcal{C}(1)$.

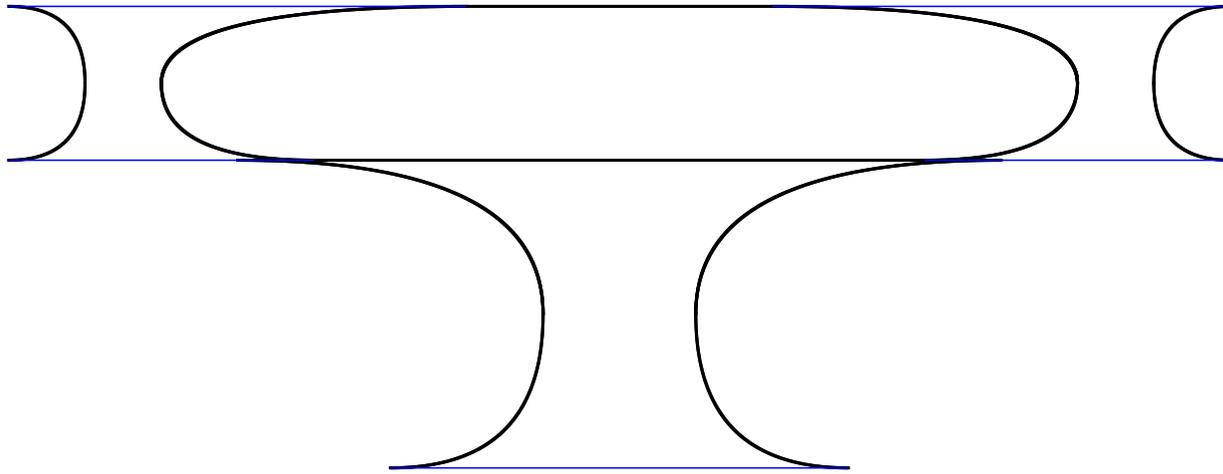
予想

(1) $\mathcal{M}(G, N) = \emptyset$ ($\forall N \geq G + 3$) ? (Hoffman-Meeks).

(2) $\mathcal{M}(G, 3) = \mathcal{C}(G)$ ($\forall G \geq 2$) ?.







$G \setminus N$	1	2	3	4	5	...
0	plane	catenoid	×	×	×	...
1	×	×	Costa	×	×	...
2	×	×	HM?		×	...
3	×	×	HM?			
0			

この節で紹介しようと思う Traizet の '02 年の仕事は、Costa の 1 パラメータ族の極限のような対称性の低い極限状態から陰関数定理によって多くの非対称な例の存在を示そうと言うものである。

なぜわざわざ極限状態から始めるかと言う点について触れておくと、一般に種数と ends の個数が同じクラスの中で、概ね、極小曲面が最も対称性の高いものから発見されて来たのは、要するに計算がしやすいからであった。ところが、これらの例の次に高い対称性が実現されるのが、極限状態なのである。曲面としては壊れているが、拡大してみると、各ピースがちゃんときれいな曲面となっている。その傍証として、次の結果を挙げておく。これは Choi-Schoen, White らによって得られ、Ros によって整理されたものである。

定理 **6.1.**(Ros, '95) $(G, N) \neq (0, 1)$ とする。

$\mathcal{M}(G, N) \supset \{M_n\}$ に対し、その部分列が下記の意味で $\{M_{1,\infty}, \dots, M_{m,\infty}\}$ に収束する。

$\forall n \in \mathbf{N}$ に対し、相似変換 $\varphi_{i,n}$ ($i = 1, \dots, m$) が存在して、
 $\forall R > 0$ に対し、 $B_{i,n} := \varphi_{i,n}^{-1}(B(0, R))$, $M_{i,n} := M_n \cap B_{i,n}$ とおくならば、次が成り立つ。

(1) $C(M_n) = \sum_{i=1}^m C(M_{i,\infty})$.

(2) $\varphi_{i,n}(M_n)$ は $M_{i,\infty}$ に $B(0, R)$ 上一様収束する。

($\varphi_{i,n}(M_{i,n}) = \varphi_{i,n}(M_n) \cap B(0, R)$ は $M_{i,\infty}$ に $B(0, R)$ 上一様収束する。)

(3) n_R が存在して、 $\forall n \geq n_R$ に対して、

- ・ $B_{i,n} \cap B_{j,n} = \emptyset$ ($\forall i \neq j = 1, \dots, m$).
- ・ $\forall k = 1, \dots, N$ に対し、 x_1x_2 -平面から数個の閉球を除いた領域上の関数のグラフ $\Omega_{k,n}$ が存在して、 M_n の一つの end (k 段目の end と呼ぶ) を含む。
- ・ $M_n = \sum_{i=1}^m M_{i,n} \cup \sum_{k=1}^N \Omega_{k,n}$

さて、Traizet の考えたのは、この各 $X_{\infty,i}$ が全て catenoid と言う場合と言う訳である。

彼の得た定理は次のようなものである。少し長いが……。

定理 6.2. (論文の定理 1) 変形の極限におけるデータは次を満たすとする。

C_k ($k = 1, \dots, N$) N 個の ends に対応する複素平面を下から順に番号付けしたもの。

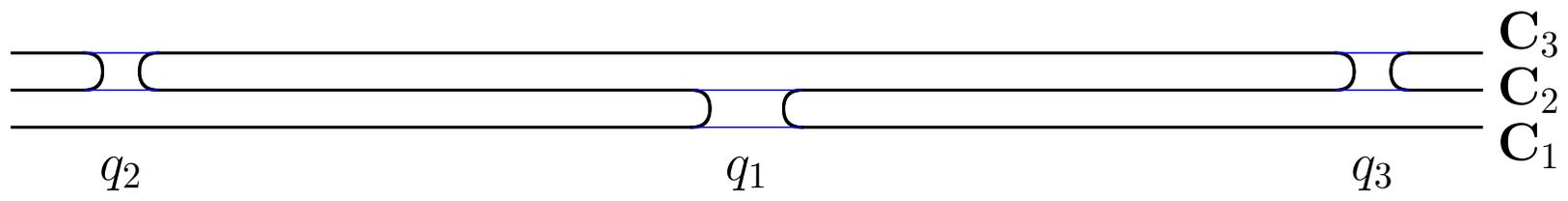
$q_i \in C$ ($i = 1, \dots, m$) 上向きに handle を付ける位置。

ただしどの平面に付けるかと言うと

$\cup_{k=1}^{N-1} I_k = \{1, \dots, m\}$ disjoint union, $i \in I_k$ のとき、 $q_i \in C_k$ と C_{k+1} とを結ぶ。

$I_k \neq \emptyset$, $m_k = \#I_k$ とする。

$\tilde{a}_k \in \mathbf{R}_+$ ($k = 1, \dots, N-1$) q_i ($i \in I_k$) につける handle の大きさ (weight ではないので正)。



$$F_i = \begin{cases} \sum_{j \in I_k; j \neq i} \frac{2\tilde{a}_k^2}{q_i - q_j} - \sum_{j \in I_{k \pm 1}} \frac{\tilde{a}_k \tilde{a}_{k \pm 1}}{q_i + \bar{q}_j} & (i \in I_k; k \text{ は奇数}) \\ \sum_{j \in I_k; j \neq i} \frac{2\tilde{a}_k^2}{-\bar{q}_i + \bar{q}_j} - \sum_{j \in I_{k \pm 1}} \frac{\tilde{a}_k \tilde{a}_{k \pm 1}}{-\bar{q}_i - q_j} & (i \in I_k; k \text{ は偶数}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i \in I_k; k: \text{odd}} q_i F_i + \sum_{i \in I_k; k: \text{even}} (-\bar{q}_i) F_i \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} m_k (m_k - 1) \tilde{a}_k^2 - \sum_{k=1}^{N-2} m_k m_{k+1} \tilde{a}_k \tilde{a}_{k+1} \end{aligned}$$

とおく。(注：Traizet は、これ (F_i) を force と呼んでいるが、実際には、消えてほしい水平方向の周期（すなわち flux の虚部に相当するもの）として用いている。極限が catenoid のときは、消える条件式が同じになる。)

$$(1) F_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(2) \mathbf{C}^m \ni (q_i) \mapsto (F_i) \in \mathbf{C}^m \text{ の rank } m - 2$$

$$(3) \mathbf{R}^{N-1} \ni (\tilde{a}_k) \mapsto W \in \mathbf{R} \text{ の rank } 1$$

を全て満たす handle の位置と大きさの組

$(q_i, \tilde{a}_k)_{i=1, \dots, m; k=1, \dots, N-1}$ に対し、 $t \rightarrow 0$ のとき、これらを「実現」する極限に収束する、 t を含めて $N - 1$ パラメーター族の極小曲面が存在する。特に、極限における $\text{end } \infty_k$ の大きさは、

$$c_k := (-1)^k a_k = m_{k-1} \tilde{a}_{k-1} - m_k \tilde{a}_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

を満たす。(ただし、形式的に $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_N = 0$ とする。) この値が単調増加ならば、十分小さい $t > 0$ に対して、この極小曲面は埋め込みである。

極小曲面のみが主題の集中講義なら、以下、2コマくらいかけて、§4 で確認した事項に沿って、その証明のあらましを解説するところなのであるが、今回は省略することとしたい。

7 Traizet の仕事2(抄)

Traizet は '02 年の論文において、埋め込まれた N -noids の列の崩壊した極限状態として、 N 枚の平面の隣接する 2 枚を無限小の catenoids により連結したものを考え、そこに陰関数定理を適用して、崩壊していない埋め込まれた N -noids の族を構成した。続く '04 年の論文では逆に、埋め込まれた N -noids の列の崩壊した極限状態が、どのような制約条件の下にあるかを考察している。ここに導かれる制約条件は、陰関数定理を適用する際に課した条件を正当化するものであるが、

一方、Ros の結果（定理 6.1）が示唆しているように、この極限状態は必ずしも N 枚の平面の隣接する 2 枚を無限小の catenoids により連結したものになるとは限らず、例えば無限小の Costa 曲面が 3 枚の平面を連結している場合も有り得るし、また、より高位の無限小の曲面を含んでいる可能性もある。よって、一般的にはその制約条件はより複雑な形をとって記述されることになる。

Traizet の '04 年の仕事の目的の一つは、前節の予想の解決に向けて、一つの里程標を立てることである。（なお、前節同様、本節も結果の紹介にとどめる。）

埋め込まれた N -noids M は各 end ∞_k ($k = 1, \dots, N$) が x_1x_2 -平面と平行になるよう配置されているとする。特に下から数えて奇数番目が下向きであると仮定すると、 N -noids が埋め込みであるためには、ends ∞_k の weights a_k に対し、上向きを正と考えた weights の列 $\{c_k := (-1)^k a_k\}_{k=1}^N$ が広義単調増加 ($c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_N$) でなければならない。

ここで、

・ M が分離された ends を持つ $\iff \{c_k\}_{k=1}^N$ が狭義単調増加
($c_1 < c_2 < \dots < c_N$).

・ $\epsilon > 0$ とする。

M が ϵ -分離された ends を持つ $\iff c_{k+1} - c_k \geq \epsilon(c_N - c_1)$
($k = 1, \dots, N - 1$).

さらに、 $\mathcal{M}_n \supset \{M_n\}$ に対し、

・ $\{M_n\}$ が一様に分離された ends を持つ $\iff n$ によらない
 $\epsilon > 0$ が存在して、 M_n が ϵ -分離された ends を持つ。
と、それぞれ定義する。

以下、 $\mathcal{M}(G, N) \supset \{M_n\}$ について、定理 6.1 の収束を考
える。

$k = 1, \dots, N$ に対し、

$I_k := \{i \mid M_{i,\infty} \text{ が } k \text{ 段目の end を持つ}\}$ とおく。(この I_k は §6
の $I_{k-1} \cup I_k$ である。)

相似変換 $\varphi_{i,n}$ の拡大率を $\mu_{i,n}$ とする。

$\{M_n\}$ が一様速度を持つ $\iff C > 0$ が存在して $\mu_{i,n} \leq C\mu_{j,n}$
($\forall i, \forall j = 1, \dots, m; \forall n \in \mathbf{N}$)

と定義する。ここで、 $\mu_{i,n} = 1 \ \forall i = 1, \dots, m; \forall n \in \mathbf{N}$ を仮定し

てよい。実際、 $\tilde{M}_n := \mu_{1,n}M_n$, $\tilde{\varphi}_{i,n} := \frac{1}{\mu_{i,n}}\varphi_{i,n}$ とおくと、その

拡大率は $\tilde{\mu}_{i,n} = 1$.

$\{M_n\}$ が一様速度を持つとき、 $\frac{\mu_{i,n}}{\mu_{1,n}} \in [\frac{1}{c}, c]$ の部分列は収束するので、その極限を l_i とおくと、

$$\tilde{\varphi}_{i,n}(\tilde{M}_n) = \frac{1}{\mu_{i,n}} \varphi_{i,n}(\mu_{1,n} M_n) = \frac{\mu_{1,n}}{\mu_{i,n}} \varphi_{i,n}(M_n) \rightarrow \frac{1}{l_i} M_{i,\infty} =: \tilde{M}_{i,\infty}.$$

$\{M_n\}$ が一様速度を持たないとき、部分列を選び、添え字を入れ換えれば、 $\mu_{1,n} := \min\{\mu_{i,n} | i = 1, \dots, m\}$ を仮定してよく、 $\frac{\mu_{i,n}}{\mu_{1,n}} \in [1, +\infty)$ の部分列は収束するか $+\infty$ に発散するかのいずれかである。収束する場合は同上で、発散する場合は $\tilde{M}_{i,\infty} = \frac{1}{\infty} M_{i,\infty}$ 平面が数枚重なっている、すなわちこの部分だけ先に崩壊しているものと考える。

$M_{i,\infty}$ の k 段目の end の weight $a_{i,k,\infty}$ に対し、
 $Q_{i,k} := (-1)^k a_{i,k,\infty}$ とおく。(**charge** と呼ぶ。) k 段目が平坦な
end のとき、または k 段目に end を持たない ($i \neq I_k$) とき、
 $Q_{i,k} = 0$ とする。

$Q_k := \sum_{i=1}^m Q_{i,k}$ ($k = 1, \dots, N$) とおく。

M_n の k 段目の end の weight $a_{k,n}$ に対し、 $c_{k,n} := (-1)^k a_{k,n}$
とおく。 $Q_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{k,n}$ が成り立つ。

x_1x_2 -平面を \mathbf{C} と同一視し、 $B_{i,n}$ の中心の \mathbf{C} への射影を $p_{i,n}$
($\forall i = 1, \dots, m; \forall n \in \mathbf{N}$) とおく。(一様速度となるよう取り替
えたので、) 一般には $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,n} = \infty$ となる可能性がある。
(ならないのは $m = 1$ すなわち一つの極限曲面 $M_{1,\infty}$ に収束す
るときに限る。) 相似変換の列 $\{\psi_n\}$ で、

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(p_{i,n}) = p_i \in \mathbf{C}$ ($\forall i = 1, \dots, m$) かつある

$i \neq j = 1, \dots, m$ に対し $p_i \neq p_j$ をみたすようなものを選ぶ。

$\{p_1, \dots, p_m\}$ を極限配置 (**limit configuration**) と呼ぶ。

$\{p_1, \dots, p_m\}$ が非特異 (**nonsingular**) $\iff p_i \neq p_j$

($\forall i \neq \forall j = 1, \dots, m$),

$\{p_1, \dots, p_m\}$ が特異 (**singular**) \iff ある $i \neq j = 1, \dots, m$

に対し $p_i = p_j$

とする。

$\{p_1, \dots, p_m\}$ が特異のとき、 $i = 1, \dots, m$ の同値関係を

$i \sim j \iff p_i = p_j$.

で定義する。 $i \in \alpha$ のとき、 $p_\alpha := p_i$ と表す。

$Q_{\alpha,k} := \sum_{i \in \alpha} Q_{i,k}$ とおく。

$\forall \alpha$ に対し、相似変換の列 $\{\psi_n^\alpha\}$ で、

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n^\alpha(p_{i,n}) = p_i^\alpha \in \mathbf{C}$ ($\forall i \in \alpha$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n^\alpha(p_{j,n}) = \infty$

($\forall j \notin \alpha$) かつある $i \neq j \in \alpha$ に対し $p_i^\alpha \neq p_j^\alpha$ をみたすようなもの

を選ぶ。

$\{p_i^\alpha | i \in \alpha\}$ を部分配置 (**subconfiguration**) と呼ぶ。

$\{p_i^\alpha | i \in \alpha\}$ が非特異 $\iff p_i^\alpha \neq p_j^\alpha \ (\forall i \neq \forall j \in \alpha)$,

$\{p_1, \dots, p_m\}$ が **nested** \iff ある α に対し $\{p_i^\alpha | i \in \alpha\}$ が
特異

\iff ある $i \neq j \in \alpha$ に対し $p_i^\alpha = p_j^\alpha$

とする。

一般に、配置の添字集合 $\{1, \dots, m\}$ を tree を用いて表す。
 $\{1, \dots, m\}$ の各元を leaf とし、部分 tree で label されるものを
node とし、tree 全体で label されるものを root とする。各 leaf
の深度 (**depth**) は root との距離により定義し、配置の深度は
leaf の深度の最大値により定義する。

非特異な配置は深さ 1, 部分配置が非特異な配置は深度 2 で
ある。

$\forall \alpha$: 節に対し、相似変換の列 $\{\psi_n^\alpha\}$ で、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n^\alpha(p_{i,n}) = p_\beta^\alpha \in \mathbf{C} \quad (\forall i \in \forall \beta : \alpha \text{ の son}),$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n^\alpha(p_{j,n}) = \infty \quad (\forall j \notin \alpha)$ かつある $\beta \neq \gamma : \alpha \text{ の son}$ に対し $p_\beta^\alpha \neq p_\gamma^\alpha$ をみたすようなものを選ぶ。

配置が非特異のとき、

$$F_i := \sum_{k=1}^N \sum_{j=1; j \neq i}^m \frac{Q_{i,k} Q_{j,k}}{\bar{p}_i - \bar{p}_j} \quad (\forall i = 1, \dots, m),$$

部分配置が非特異のとき、

$$F_i^\alpha := \sum_{k=1}^N \sum_{j \in \alpha; j \neq i} \frac{Q_{i,k} Q_{j,k}}{\bar{p}_i^\alpha - \bar{p}_j^\alpha} \quad (\forall i \in \alpha; \forall \alpha),$$

nested のとき、

$$F_\beta^\alpha := \sum_{k=1}^N \sum_{\gamma: \alpha \text{ の son}; \gamma \neq \beta} \frac{Q_{\beta,k} Q_{\gamma,k}}{\bar{p}_\beta^\alpha - \bar{p}_\gamma^\alpha} \quad (\forall \beta : \alpha \text{ の son}; \forall \alpha)$$

でそれぞれ **force** を定義する。

ここで、定理 6.2 において、 $\forall k = 1, \dots, N - 1, \forall i \in I_k$ に対し、

$$\begin{cases} Q_{i,k} := -\tilde{a}_k & (M_{i,\infty} \text{ の下向きの flux }) \\ Q_{i,k+1} := \tilde{a}_k & (M_{i,\infty} \text{ の上向きの flux }), \end{cases}$$

また

$$p_i := \begin{cases} \bar{q}_i & (i \in I_k : k \text{ は奇数}) \\ -q_i & (i \in I_k : k \text{ は偶数}) \end{cases}$$

とおけば、

$$F_i = \sum_{k=1}^N \sum_{j \in I_{k-1} \cup I_k; j \neq i} \frac{Q_{i,k} Q_{j,k}}{\bar{p}_i - \bar{p}_j},$$

$$W = \sum_{k=1}^N \sum_{i < j} Q_{i,k} Q_{j,k}$$

であることに留意しておこう。

定理 7.1. (論文の定理 4, 5, 6)

[1] 配置が非特異のとき、

(1) $F_i = 0 \forall i = 1, \dots, m.$

(2) $i \in I_k \cap I_{k+1}$ のとき、 $Q_{i,k+1} - Q_{i,k} = H_k : i = 1, \dots, m$ によらない定数。

[2] 部分配置が非特異のとき、

(1a) $F_i^\alpha = 0 (\forall i \in \alpha; \forall \alpha).$

(1b) $F_\alpha = 0 (\forall \alpha).$

(2a) $i \in I_k \cap I_{k+1}$ のとき、 $Q_{i,k+1} - Q_{i,k} = H_k^\alpha : i \in \alpha$ によらない定数。

(2b) $i \in I_k \cap I_{k+1}$ のとき、ある $\rho \in [0, 1]$ が存在して

$$\rho(Q_{i,k+1} - Q_{i,k}) + (1 - \rho)(Q_{\alpha,k+1} - Q_{\alpha,k}) = H_k : i = 1, \dots, m$$

によらない定数。

[3] nested のとき、

(1) $F_\beta^\alpha = 0$ ($\forall \beta : \alpha$ の子; $\forall \alpha$).

(2) $i \in I_k \cap I_{k+1}$, $i \in \alpha$ のとき、 α と i を結ぶ経路を

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r = i$ (r は i と α の深さの差) とすると、あ

る $\rho_1, \dots, \rho_r \in [0, 1]$ が存在して $\sum_{s=1}^r \rho_s = 1$,

$\sum_{s=1}^r \rho_s (Q_{\alpha_s, k+1} - Q_{\alpha_s, k}) = H_k^\alpha : i \in \alpha$ によらない定数。

[2] (2b) について、次のことに注意する。

- ・ p_i が非特異ならば $\rho = 1$ すなわち $Q_{i,k+1} - Q_{i,k} = H_k$.
- ・ $\{M_{i,\infty} | i \in \alpha\}$ が一つの曲面のように振舞うならば $\rho = 0$ すなわち $Q_{\alpha,k+1} - Q_{\alpha,k} = H_k$.
- ・ p_j が非特異で $j \in I_k \cap I_{k+1}$ ならば
 $Q_{j,k+1} - Q_{j,k} \in [Q_{i,k+1} - Q_{i,k}, Q_{\alpha,k+1} - Q_{\alpha,k}]$ または
 $[Q_{\alpha,k+1} - Q_{\alpha,k}, Q_{i,k+1} - Q_{i,k}]$.

[3] (2) については、

- ・ $H_k^\alpha \in [\min\{Q_{\alpha_s,k+1} - Q_{\alpha_s,k} | s = 1, \dots, r\}, \max\{Q_{\alpha_s,k+1} - Q_{\alpha_s,k} | s = 1, \dots, r\}]$.

定理 7.2. (論文の定理 7)

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i < j} Q_{i,k} Q_{j,k} = 0.$$

定理 7.1, 7.2 を用いて、次の定理を得る。

定理 7.3. (論文の命題 6)

$N = 3$ とする。 $\{M_n\}$ が一様な速度を持つとき、極限 $\{M_{i,\infty} | i = 1, \dots, m\}$ は次のいずれかである。

(1) $m = 1, M_{1,\infty} \in \mathcal{M}(G, 3)$.

(2) $m = r + 1, r \geq 2$ (Costa-Hoffman-Meeks の配置)

$M_{1,\infty}, \dots, M_{r,\infty}$: 1 ~ 2 段目の catenoid, $-Q_{i,1} = Q_{i,2} = 1,$
 $p_i = \zeta_r^{i-1}$ ($i = 1, \dots, r$),

$M_{r+1,\infty}$: 2 ~ 3 段目の catenoid, $-Q_{r+1,2} = Q_{r+1,3} = r - 1,$
 $p_{r+1} = 0.$

(3) $m = 4$ (Horgan の配置 ?)

$M_{1,\infty}, M_{2,\infty}$: 1 ~ 2 段目の catenoid, $-Q_{i,1} = Q_{i,2} = 1$ ($i = 1, 2$),

$p_1 = 1, p_2 = -1,$

$M_{3,\infty}, M_{4,\infty}$: 2 ~ 3 段目の catenoid, $-Q_{i,2} = Q_{i,3} = r - 1$

($i = 3, 4$), $p_3 = a, p_4 = 1/a$ ($a \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1, -1\}$).

(4) $m = 4$ ((3) の $a \rightarrow +0$ のときの極限、非特異

$\alpha = \{1, 2, 3\}$)

$M_{1,\infty}, M_{2,\infty}$: 1 ~ 2 段目の catenoid, $-Q_{i,1} = Q_{i,2} = 1$ ($i = 1, 2$),

$p_1^\alpha = 1, p_2^\alpha = -1,$

$M_{3,\infty}$: 2 ~ 3 段目の catenoid, $-Q_{3,2} = Q_{3,3} = 1, p_3^\alpha = 0,$

$M_{4,\infty}$: 2 ~ 3 段目の catenoid, $-Q_{4,2} = Q_{4,3} = c \in (0, 1]$.

定理 7.3 の系として、次を得る。(ちょっと怪しい)

系 7.4. (論文の定理 2)

$G \neq 2$ とする。 $\mathcal{M}(G, 3) \setminus \mathcal{C}(G) \supset \{M_n\}$ が一様に分離された ends を持つならば、 $\{M_n\}$ のある部分列が $M_\infty \in \mathcal{M}(G, 3)$ に収束する。

定理 7.5. (論文の定理 1)

$G \geq 1$ とする。 $\mathcal{M}(G', N') = \emptyset$ ($\forall G' < G, \forall N' \geq G' + 3$) ならば $\mathcal{M}(G, N)$ は compact ($\forall N \geq G + 3$) である。

$G = 1$ のとき、事実 (3) より、仮定が $G' = 0 < G = 1$ について満たされるので、

系 7.6. (論文の系 1)

$\mathcal{M}(1, N)$ は compact ($\forall N \geq 4$) である。

これが \emptyset であるか否かはまだ知られていない。平行な ends を持つ種数 1 の 4-noids は構成できるので、実際は極めて微妙な処である。

8 Flux 公式の逆問題

この節以降では、主として \mathbf{R}^3 内の完備極小曲面の埋め込まれた end の flux について、この二十年くらいの動きと、筆者自身が考えて来た(いる)ことを併せてお話ししたい。

前節までに見たように、次第に多くの例が得られて来ると、次なる関心は空間の全貌に向けられることになる。しかし、埋め込みに限らず、様々な class の極小曲面について、それをとらえるためには、中程の解と境界近くの解の間をつなぐ理論が必要となるのは言うまでもなく、前節でご紹介した Traizet '04 の仕事も、その方向性のものである。埋め込みに準ずるよいはめ込みである Alexandrov embedded な n -noid を扱った Casín-Ros の仕事(次節で簡単に紹介)は、それに成功した珍しい例と言えるだろう。そして、そこでも flux は極めて重要な役割を果たしているのである。

11節でご紹介する筆者自身の結果は、埋め込みではなく、有限個の埋め込まれた end のみを持つはめ込みに関するものであるが、やはり一応その方向性の話とすることになる。

今、 X は全曲率有限とする。 X の end が埋め込まれた end であるとき、その end は平面または catenoid に漸近する。それぞれ、平面型、catenoid 型の end と呼ぶ。これらの違いは、その flux vector が 0 であるか否かで特徴付けられる。catenoid 型の end の flux vector は、その limit normal と平行であり、その比を end の weight と呼ぶ。(厳密には標準的 catenoid との比で定義。)

M として、特に compact Riemann 面から n 個の点を除いた集合 $\overline{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ をとるとき、除かれた各点 q_j (の近傍の像) が end であり、その flux vector 並びにその weight をそれぞれ $\varphi(q_j)$, $w(q_j)$ と表すことにする。全ての end が catenoid 型であるような X を n -end catenoid または n -noid と呼ぶ。

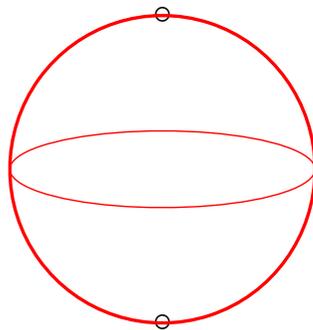
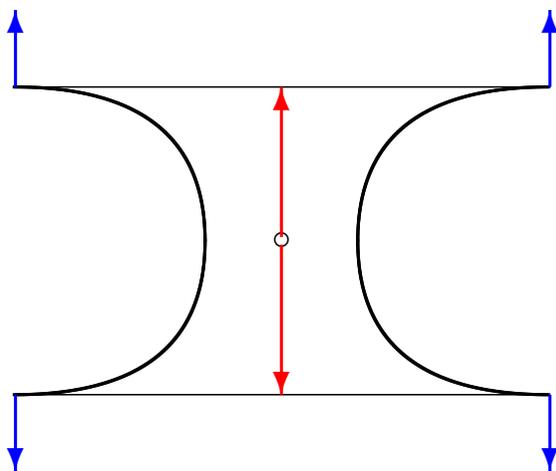
任意の n -end catenoid に対し、flux 公式からただちに

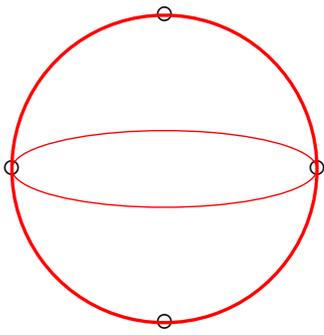
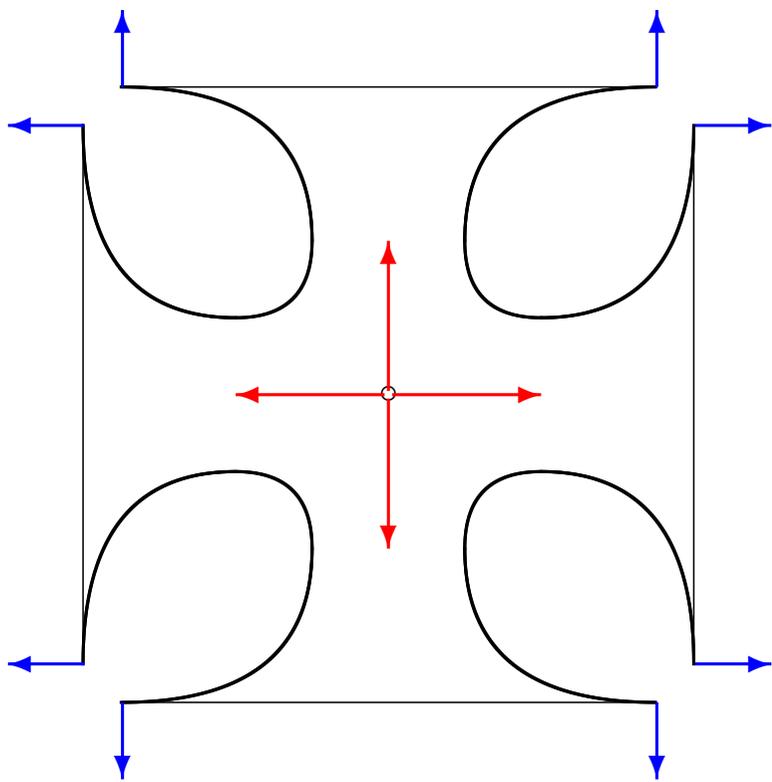
$$\sum_{j=1}^n w(q_j)G(q_j) = \mathbf{0}$$

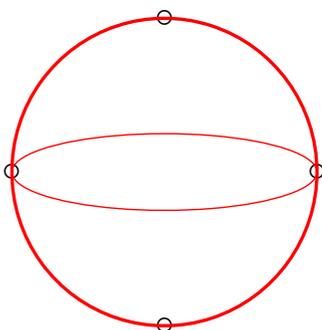
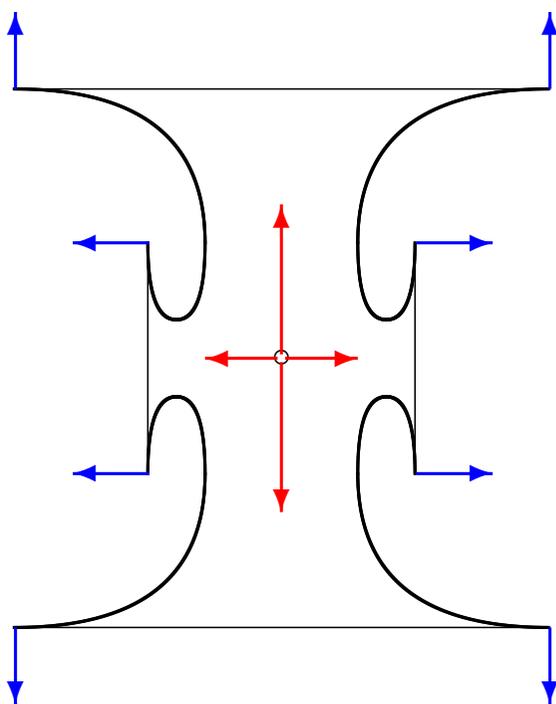
が従う。さらに、全ての end が $\mathbf{e}_3 = {}^t(0, 0, 1)$ と平行なとき、Pérez の条件は次のように書ける。

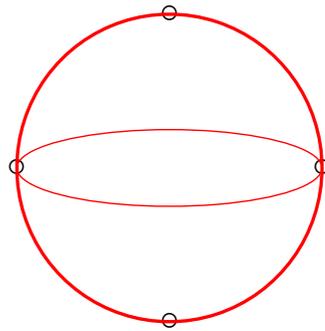
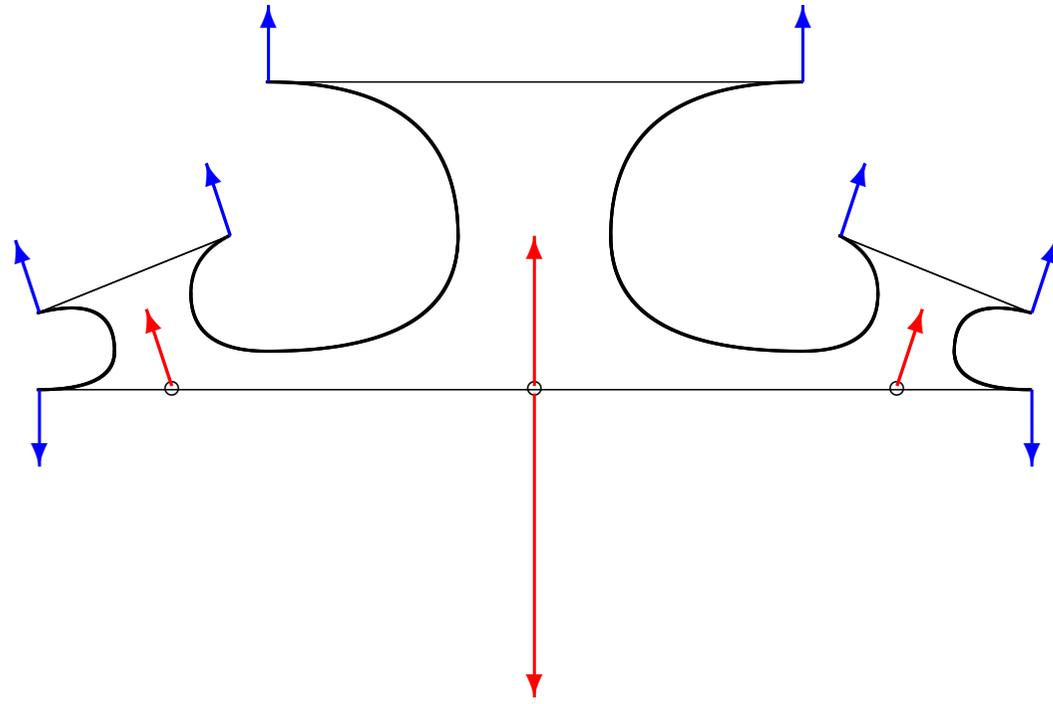
$$\left\langle \sum_{i=1}^k F(\gamma_{i1}) \times F(\gamma_{i2}), \mathbf{e}_3 \right\rangle = - \sum_{g(q_j)=0} w(q_j)^2 + \sum_{g(q_j)=\infty} w(q_j)^2$$

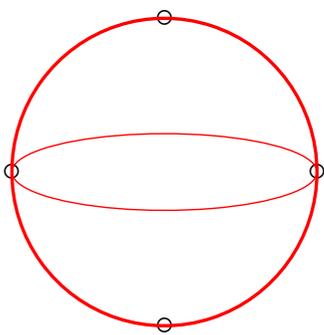
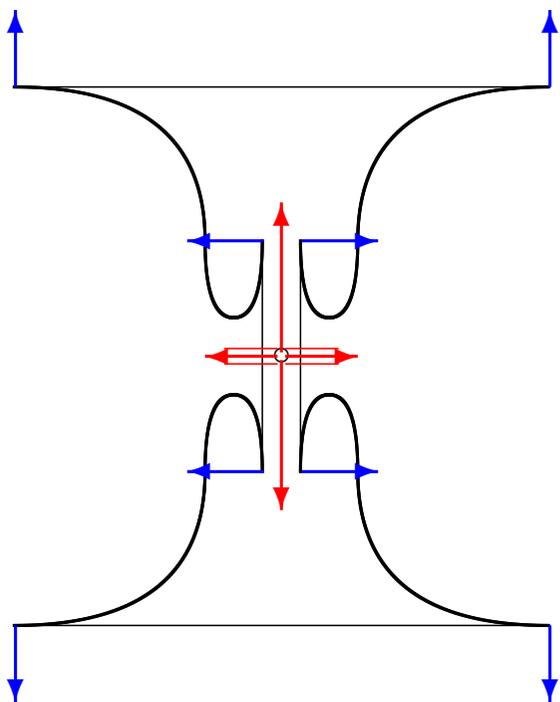
ここで γ_{i1} と γ_{i2} は自分達のみ 1 点で交わる \overline{M} の 1 次 homology 群の生成元である。種数 0 のときは、左辺は自動的に 0 となる。



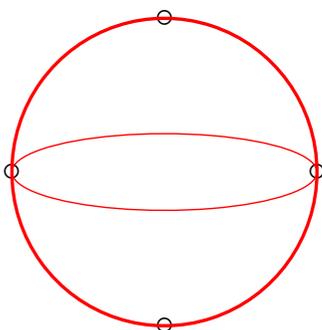
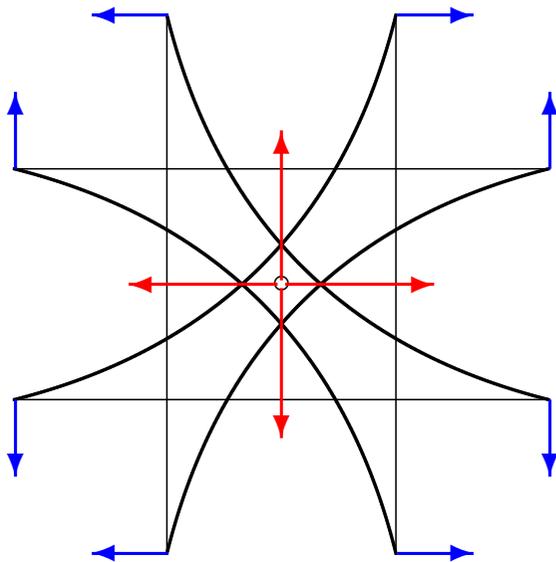








「総和が 0 である vector の組 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が与えられたとき、それらを catenoid 型 end の flux vector として持つ共形極小はめ込みが存在するか？」という問題は、筆者の知る限りでは、Rosenberg, Kusner らにより提唱されたようで、Flux 公式の逆問題、無限遠における Plateau 問題などと呼ばれている。既にご紹介したように、Rosenberg-Toubiana は極小 herisson (= Gauss 写像の写像度が 1 である分岐極小はめ込み) について、この問題の肯定的な解答を得ている。



梅原氏山田氏と筆者は、 $\overline{M} = \hat{C}$ である（つまり種数 0 の）
場合について、 n 個の単位 vector と 0 でない実数の組
 $(\mathbf{v}, \mathbf{a}) = (v_1, \dots, v_n, a_1, \dots, a_n)$ で $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ を満たすものの
内、そのほとんど全てに対し、

$$G(q_j) = v_j, \quad w(q_j) = a_j \quad (\text{従って } \varphi(q_j) = a_j v_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

を満たす n -end catenoid が存在すること（しかも generic には
高々有限個であること）を示した。

ここで「ほとんど」は本質的であり、実際、条件
 $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ を満たすの組 (\mathbf{v}, \mathbf{a}) で、対応する n -end catenoid
が存在しないものが知られている（例えば、上述の Pérez の条
件の否定など）。さらに、やや曖昧な表現を許してもらえば、共
通の flux を持つ有限個の解の内、いくつかは存在し、いくつか
は存在しないような例も知られている。

ここでは証明は紹介しないが、上の主張の意味するところを
やや正確に述べると、次のようになる。

まず、

$$\mathcal{X} := \{\text{種数 } 0 \text{ の } n\text{-noid}\} / \text{Conf}(\hat{\mathbf{C}}) \times \text{Isom}(\mathbf{R}^3),$$

$$\mathcal{V} := \{(v_j, a_j) \in (\mathbf{S}^2)^n \times \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_j v_j = 0\} / SO(3)$$

とおき、次の写像を考える。

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ X & \mapsto & (G(q_j), w(q_j)) \end{array}$$

種数 0 の n -noid X の Weierstrass data は、

$$g = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{p_j b_j}{z - q_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{z - q_j}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j b_j \prod_{k=1; k \neq j}^n (z - q_k)}{\sum_{j=1}^n b_j \prod_{k=1; k \neq j}^n (z - q_k)}$$

$$\eta = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{z - q_j} \right)^2 dz$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

写像 \mathcal{F} の中身 = limit normal と weight は

$G(q_j) = p_j$ の立体射影による逆像

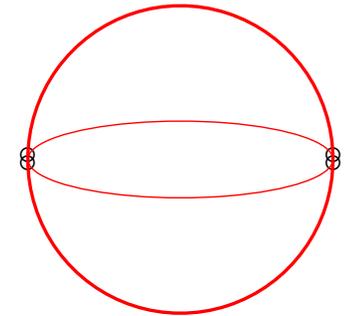
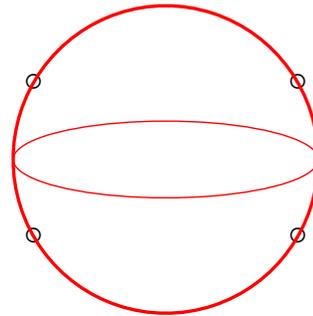
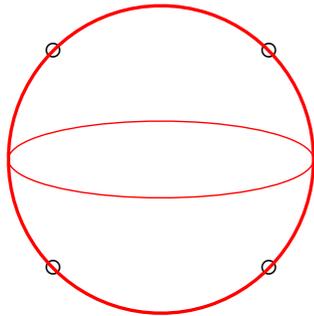
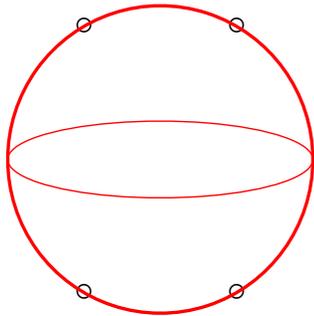
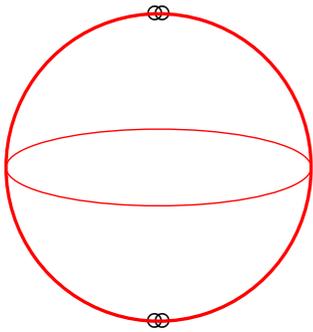
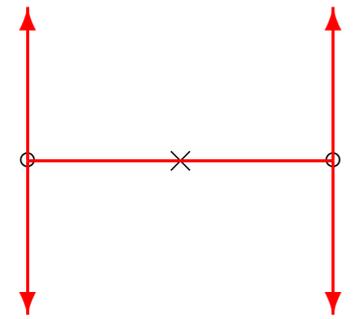
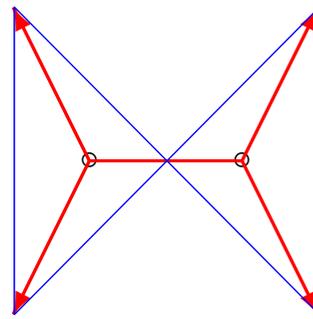
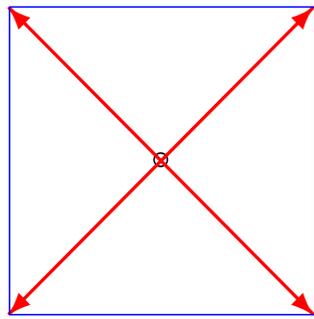
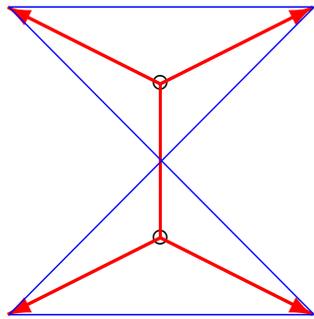
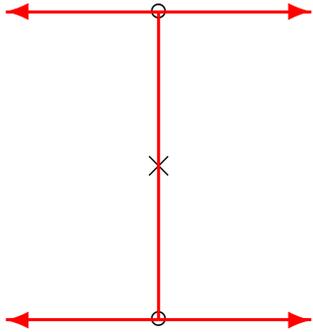
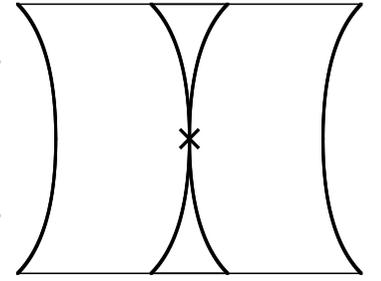
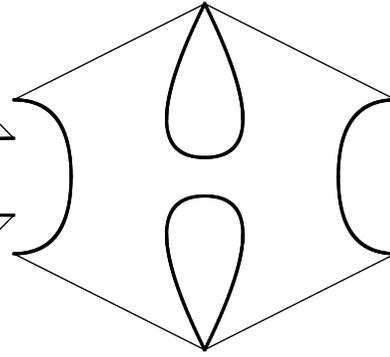
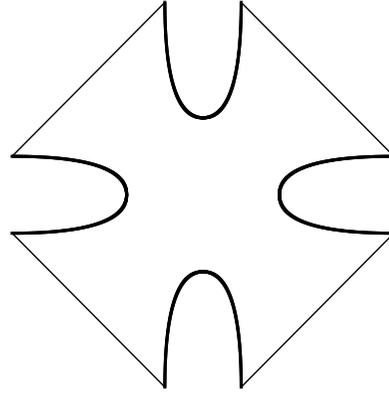
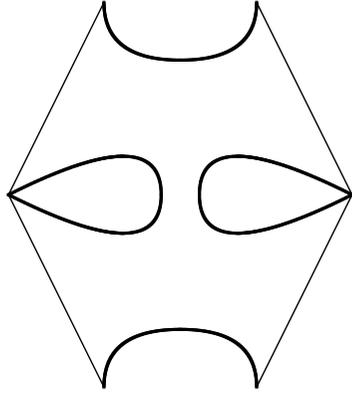
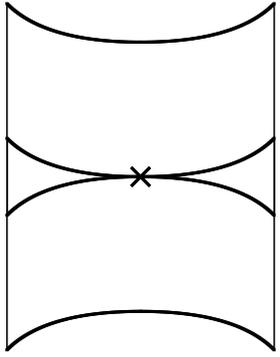
$$w(q_j) = \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j}$$

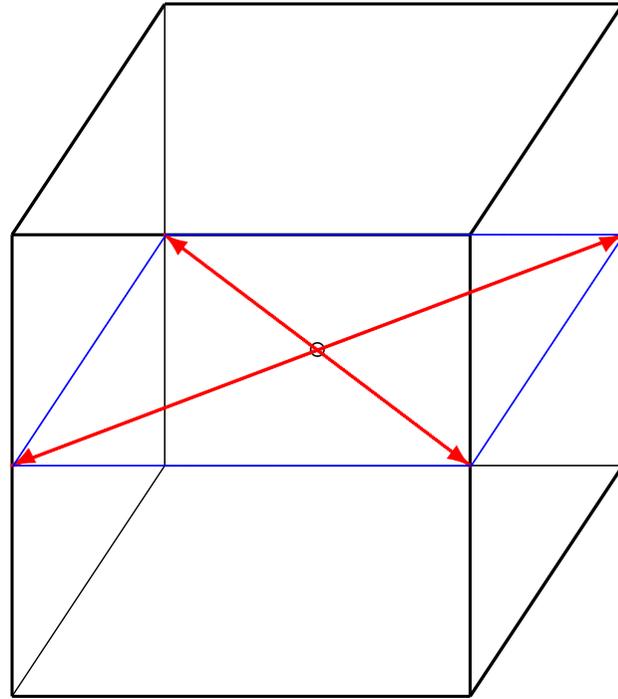
で与えられた。今、梅原氏山田氏と筆者の結果は次のように記述することができる。

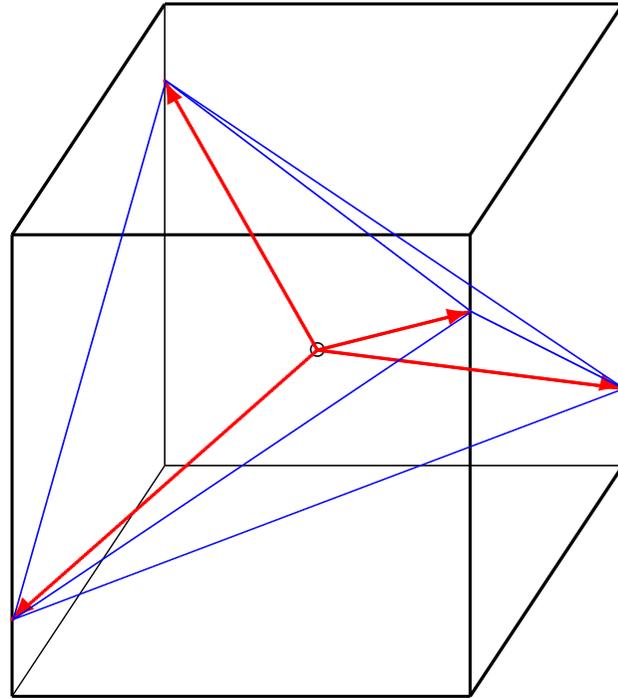
定理 8.1. $\text{Im}\mathcal{F}$ は \mathcal{V} の open dense な部分集合である。

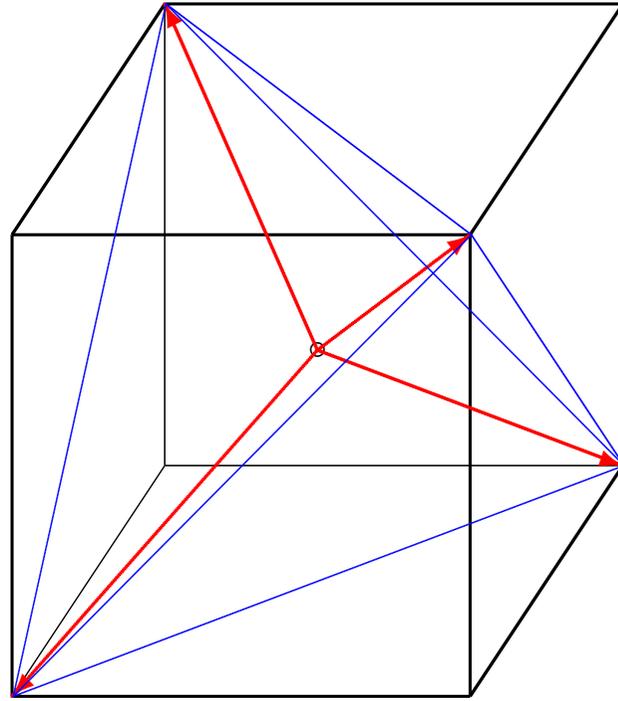
定理 8.2. $n \geq 4$ のとき \mathcal{F} は generic には 1 対 1 でない branched covering である。

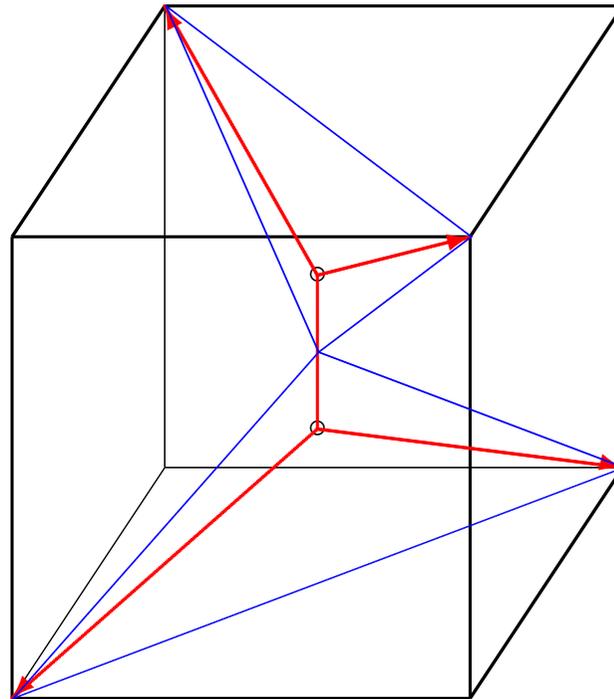
(v, a) 全体の空間を、homothety による商をとることで compact 化し、 n -end catenoid 全体の空間 \mathcal{M}_n を、その分岐被覆と見るとき、これら非存在条件（＝存在への障害）を満たす組の上に、 \mathcal{M}_n の境界が横たわっていることになる。そこで、 (v, a) を非存在条件へと近づけてゆくとき、 n -end catenoid がどのように変形してゆくかに次なる関心が向くのは自然なことと思われる。

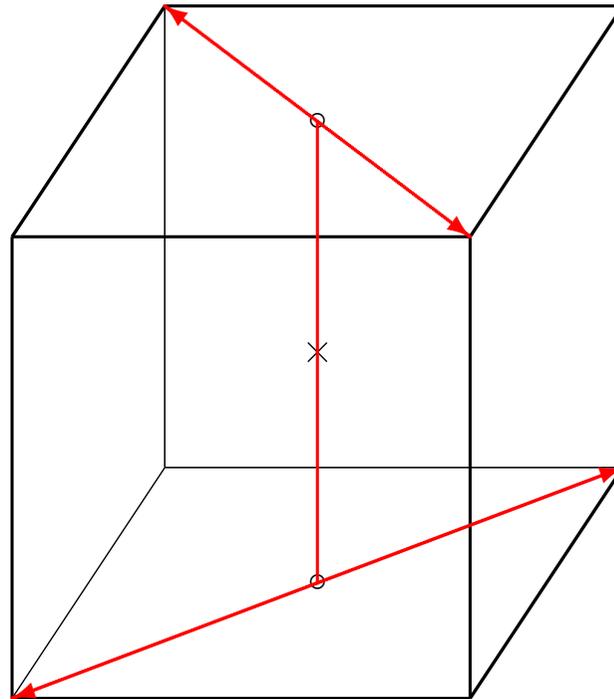


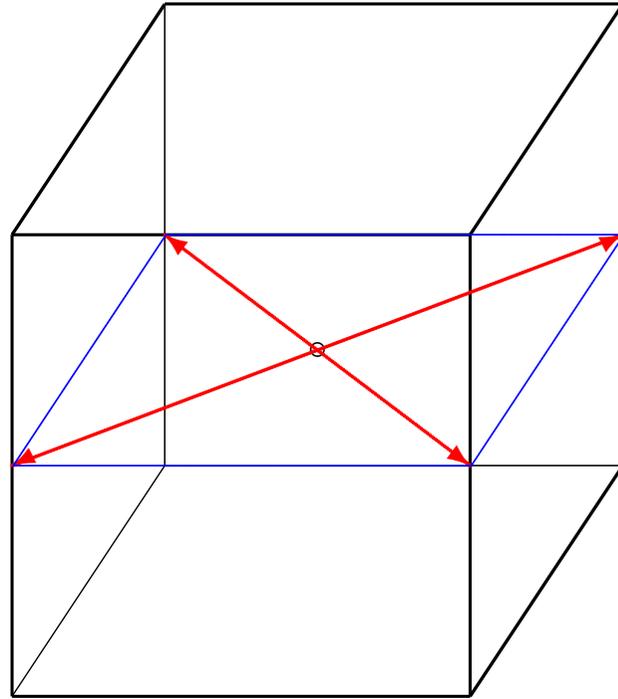


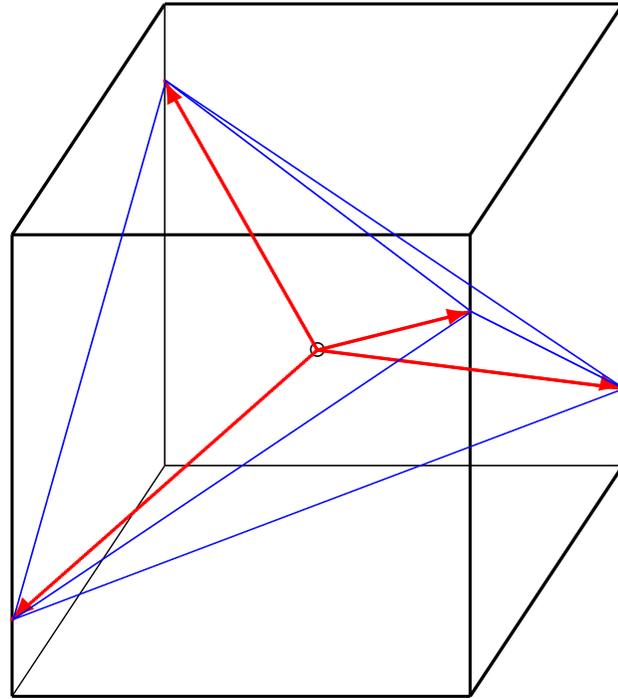


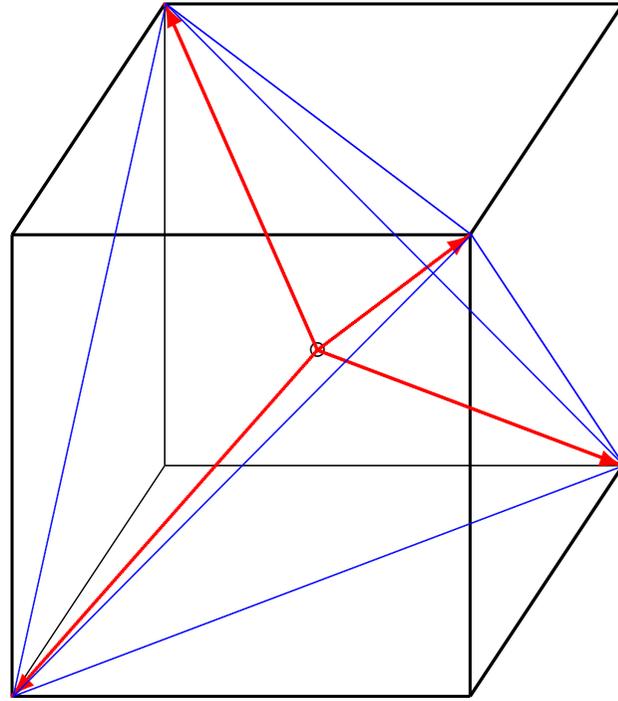


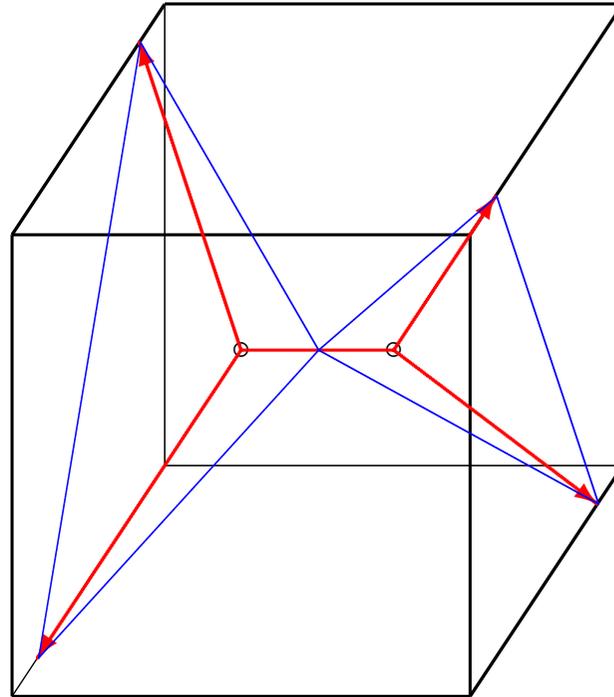


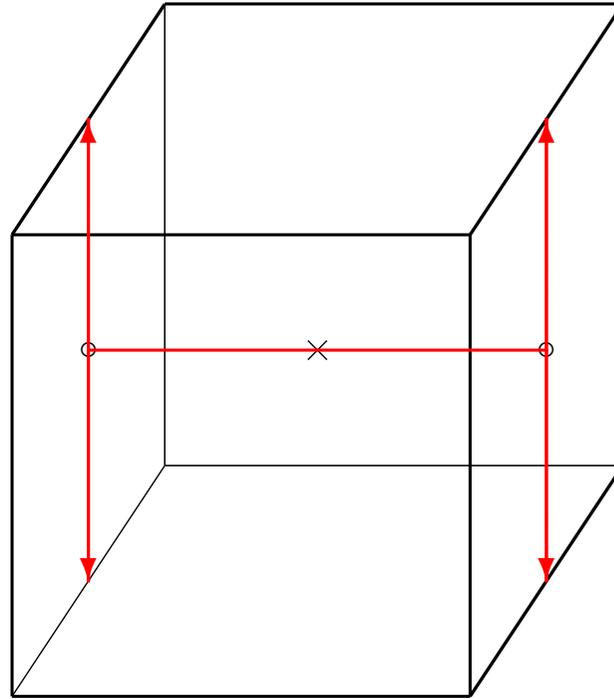


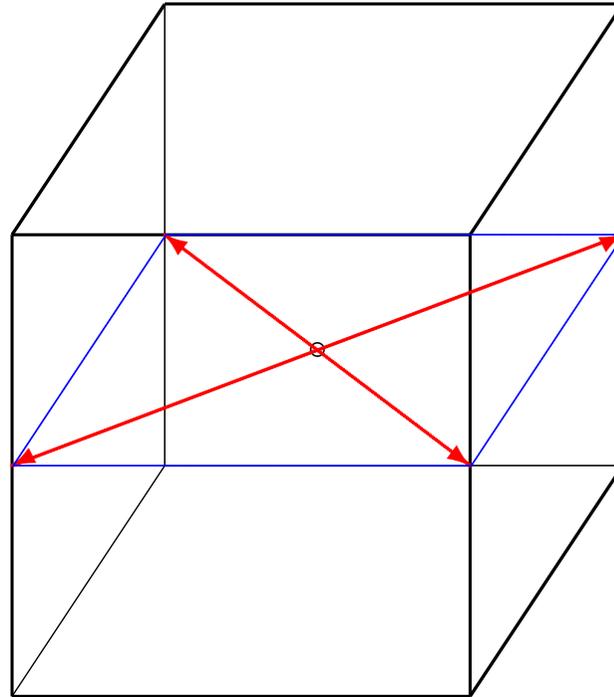


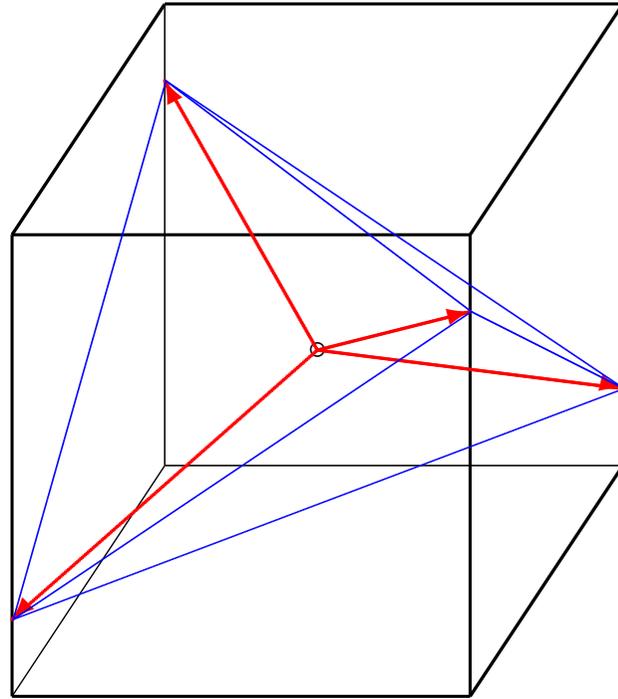


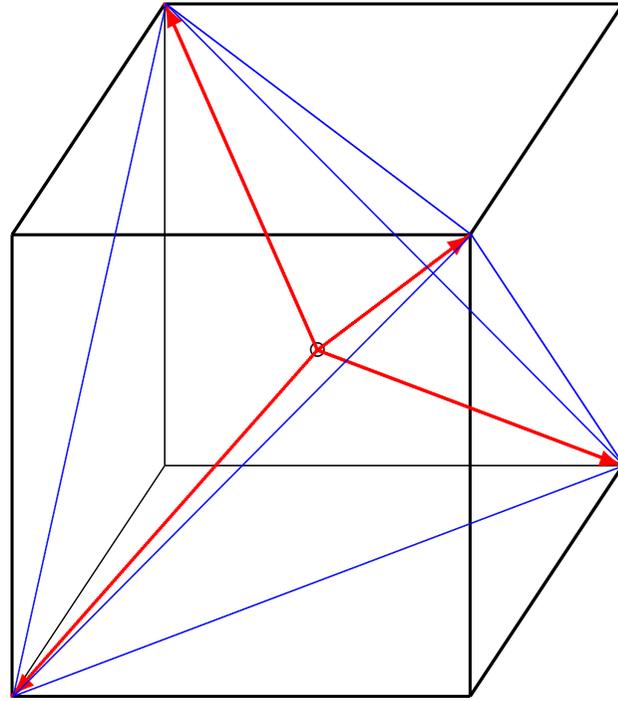


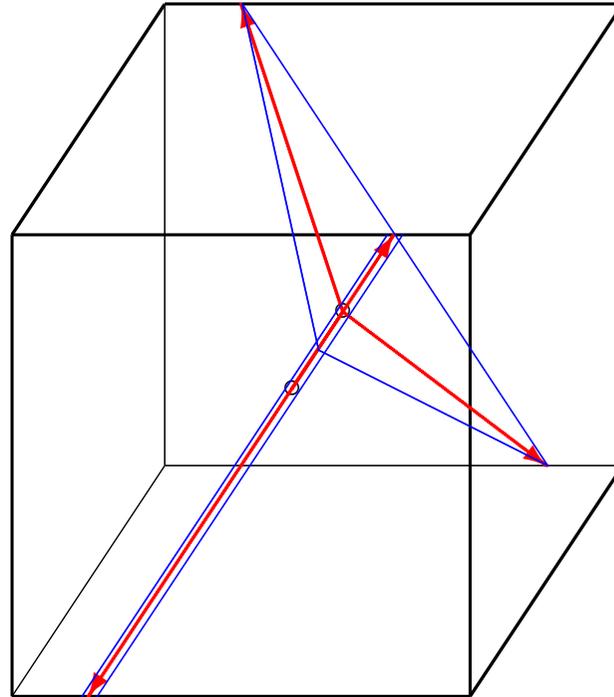


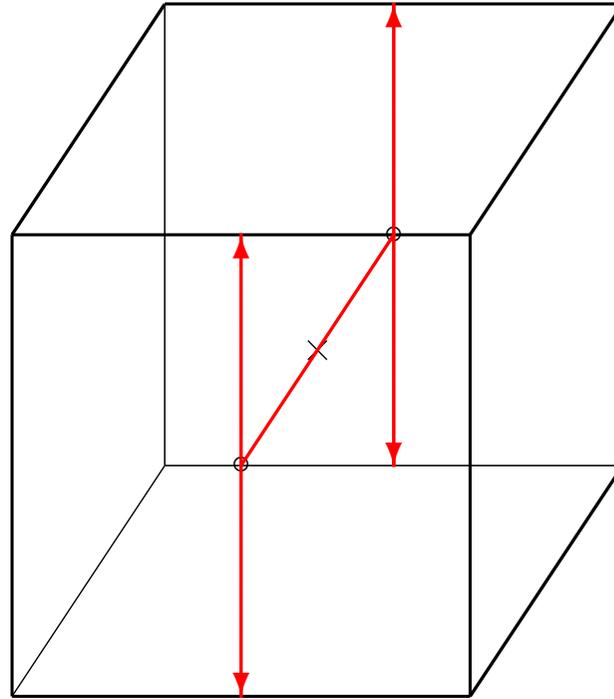












次節でご紹介する Cosín-Ros の仕事は、この点についての観察を含む特筆すべき結果である。

9 Cosín-Ros の仕事 (& Pérez-Ros の仕事)

埋め込まれた ends のみを持つ曲面は、埋め込みの次に制約の多いクラスと言える。ここでは、水平な flux を持つ Alexandrov-embedded な n -noids に関する Plateau 問題の必要十分条件を得た Cosín-Ros の結果について、あらすじのみ紹介したい。

一般に極小はめ込み $X : M = \overline{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ が Alexandrov-embedded であるとは、compact 3 次元多様体 $\overline{\Omega}$ で $\partial\overline{\Omega} = \overline{M}$ となるものと、固有な局所微分同相 $\overline{X} : \Omega = \overline{\Omega} \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ で $\overline{X}|_M = X$ となるものが存在するときを言う。

また極小はめ込み X が平面 $\Pi = \{x_3 = 0\}$ について強対称であるとは、次を満たすことを言う。

(1) 等長的 involution $s : M \rightarrow M$ で $X \circ s = S \circ X$ を満たすものが存在する。ただし S は Π に関する面对称移動である。

(2) $\{p \in M \mid s(p) = p\} = \{p \in M \mid x_3(p) = 0\}$.

(3) $|g(p)| < 1 (> 1) \forall p \in \{p \in M \mid x_3(p) > 0 (< 0)\}$. (向きの入
れ方によっては不等号は入れ替えてもよい。)

$n \geq 2$ とする。種数 0 の Alexandrov-embedded な n -end catenoid (または n -noid) $X : M = \hat{C} \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ で、全ての ends が水平なもの全体を \mathcal{M}_n と表す。

\mathbf{R}^2 内の n 角形とは、総和が 0 で各々は 0 でない n 個のベクトルの列 $V = (v_1, \dots, v_n)$ もしくはそれらを結んでできる区分的線形な閉曲線を言う。ただし、平行移動で写り合うものは同一視する。 n 角形全体を \mathcal{V}_n で表す。これは自然に $(2n - 2)$ 次元実解析的多様体となる。

\mathbf{R}^2 にはめ込まれた n 角形板とは、compact 単連結平坦 2 次元多様体で区分的線形な境界を持つ P と、その developing map $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}^2$ の組を言う。はめ込まれた n 角形板全体を \mathcal{P}_n で表す。自然な写像 $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{V}_n (P, \varphi) \mapsto \varphi(\partial P)$ により、 \mathcal{P}_n も $(2n - 2)$ 次元実解析的多様体となる。

以上の準備の下に、Cosín-Ros は、次の定理を示した。

定理 9.1. $n \geq 3$ とする。 $P : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ は (大域的な) 解析的微分同相である。

(略証) 次の流れで組み立てられている。

[1] (論文の命題 3.4)

全ての ends が水平な n -noid に関して、ある水平面について強対称であることと、Alexandrov-embedded であることは同値である。(このとき s は反正則となる。)

[2] (論文の定理 4.3)

\mathcal{M}_n は $(2n - 2)$ 次元実解析的多様体であり、順序づけられた flux vectors を対応させる写像 (flux map) $F : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ は局所微分同相である。(ただし全射ではない。)

[3] (論文の定理 5.6)

対応 (polygonal map) $P : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ で $F(M) = \varphi(\partial P(M)) (+\alpha)$ を満たすものが存在する。

[4] (論文の定理 6.3)

$F : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ は F^{-1} (狭義凸 n 角形) 上単射である。

[5] (論文の定理 7.3)

$P : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ は固有である。

[2] は、強対称な極小はめ込みに関する Jacobi 関数の性質を用いる。Ros 自身による埋め込みの場合の結果の variant である。

[3], [4] は helicoid 型の ends を持つ共役な極小曲面を考えて示す。これには周期があるが、半周期だけ取り出すと、 n -角形の各辺から帯状領域を伸ばした非 compact 領域上のグラフになっているので扱いやすい。

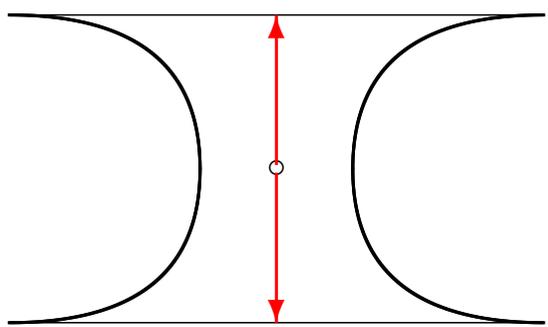
[5] は、 \mathcal{M}_n の弱 compact 性を用いる。これも Pérez-Ros による埋め込みの場合の結果の variant である。

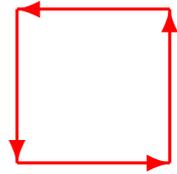
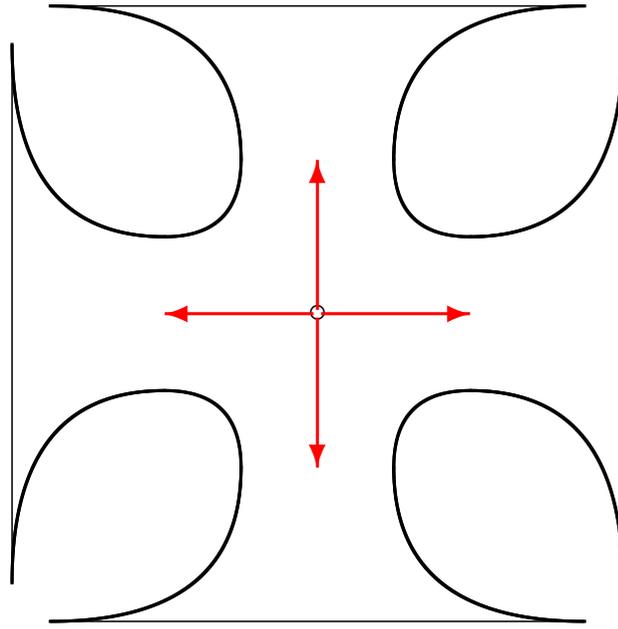
以上を併せると主定理 9.1 が得られる。

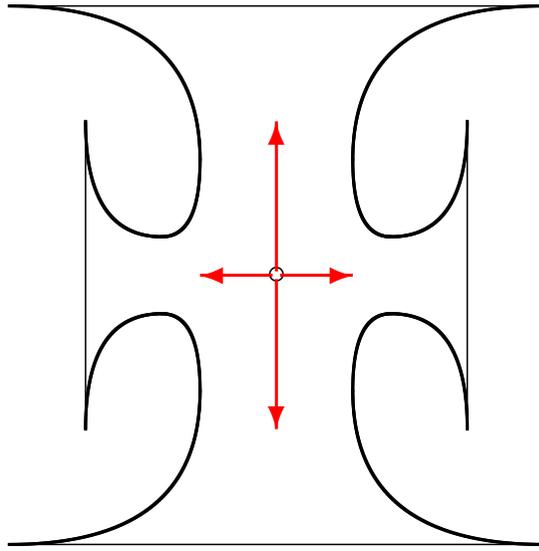
(略証終)

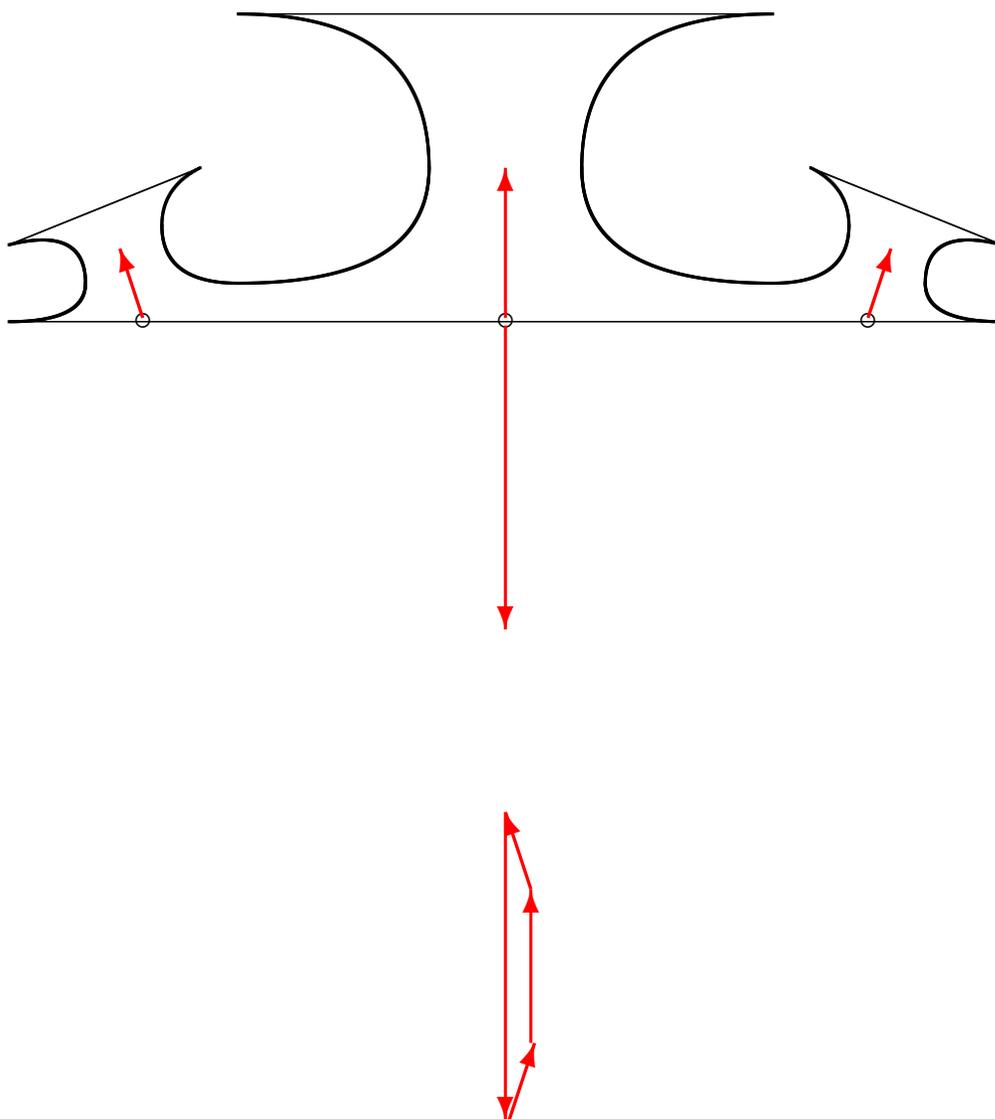
かいつまんで言うと、今、 v_j は同一平面上にあり、 a_j は全て同符号とする。ここで $a_j v_j$ をつないでゆくと、仮定 $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ より、平面内の（自己交差を持つかもしれない） n 角形ができる。この n 角形が平面内にはめ込まれた開 2 次元多様体を囲むとき、かつそのときに限り、この平面について対称で、かつ \mathbb{R}^3 内にはめ込まれた開 3 次元多様体を囲む（= Alexandrov embedded）種数 0 の n -end catenoid が唯一つ存在するというのが、彼らの結果である。

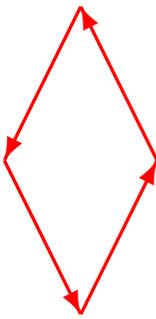
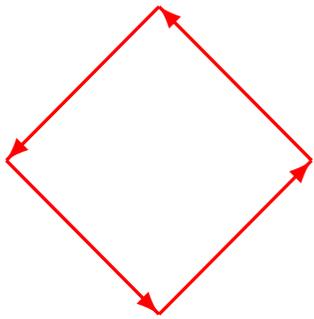
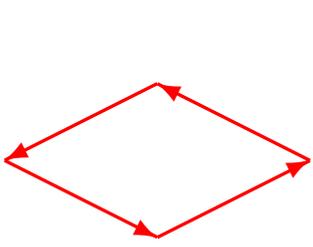
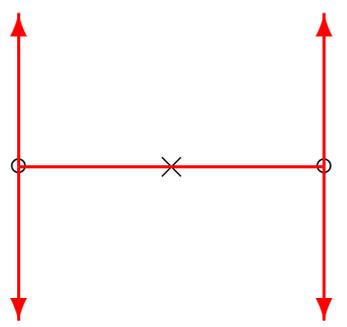
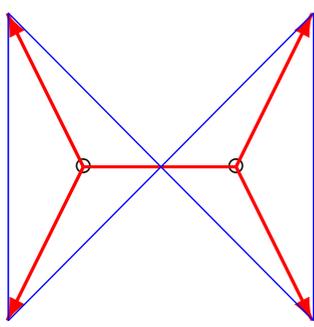
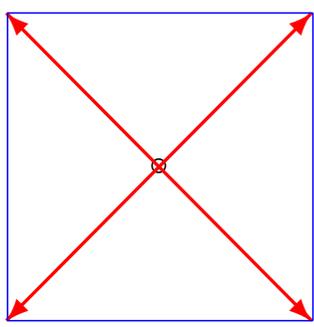
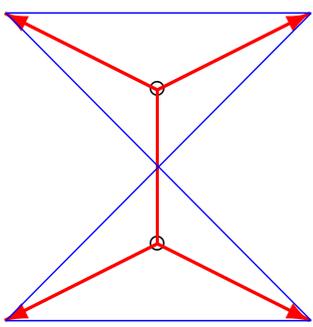
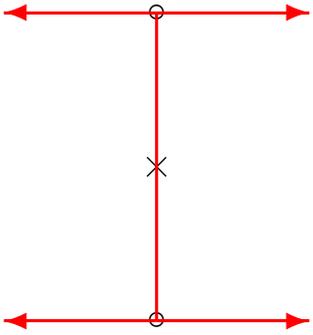
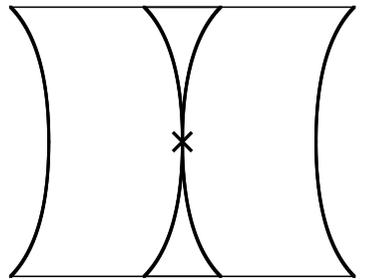
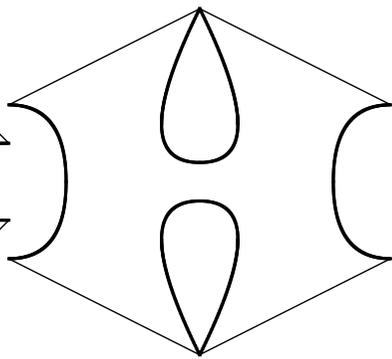
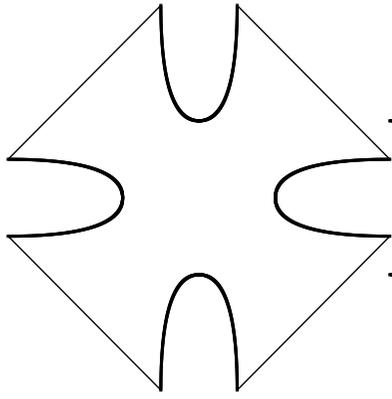
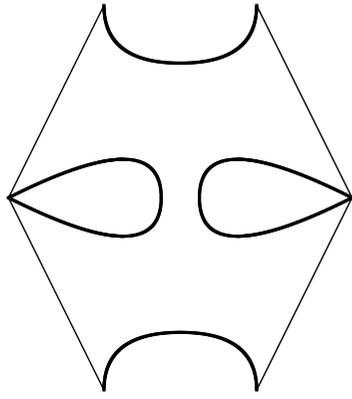
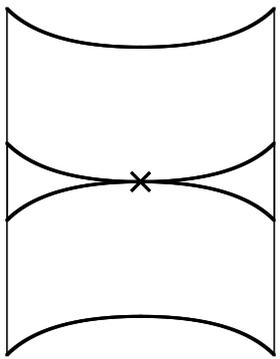
彼らの得た解 X においては、全ての end もまた対称面の上にある。一般に、極小曲面 $X(M)$ が平面について対称なとき、面対称移動で不変な平面曲線は $X(M)$ の測地線となるが、これらは共役極小曲面においては、互いに平行な直線となって現れる。そして、それらが隣接する end を結ぶとき、それらの間の距離は、間にある end の flux vector の weight の半分である。彼らの場合について、より詳しく言うと、 X の面対称移動の基本領域の境界の、共役極小はめ込みによる像が、 $a_j v_j$ 達で作る n 角形の柱となっているのである。よって、この n 角形を見れば、 X がどのように変形して行くかも、かなりわかることになる。











ここで、次の二点に注目したい。

(1) Π を実軸方向に対応する x_1x_2 -平面に取り替えると、強対称性から、 g は実軸上単調、すなわち

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{z - r_i}, \quad c_i > 0 \text{ (or } c_i < 0) \quad (i = 1, \dots, n - 1)$$

の形に限定される。

(2) \mathcal{P}_n は \mathcal{P}_3 の元を順に辺に張り合わせて作れる。ということは、 \mathcal{M}_n の任意の元の任意の end に、そこに \mathcal{M}_3 の任意の元を接ぎ木できるということではないのか？

以上のようなアプローチで別証が与えられないだろうか？

ちなみに Pérez-Ros は何を示したのかと言うと…

$k \geq 1, r \geq 3$ とする。 \mathcal{M} は、種数 k で、 r 個の埋め込まれた水平な end を持つ \mathbb{R}^3 内の有限全曲率極小曲面の空間とする。 L は M の Jacobi 作用素とする。 u が M 上の Jacobi 関数であるとは、 $Lu = 0$ を満たすことを言う。 $\mathcal{J}(M)$ は、各 end において、対数的増大度を持つ M 上の Jacobi 関数の空間とする。任意の $M \in \mathcal{M}$ に対し、 $\dim \mathcal{J}(M) \geq r + 3$ が成り立つ。 $M \in \mathcal{M}$ が非退化であるとは、 $\dim \mathcal{J}(M) = r + 3$ を満たすことを言う。 $\mathcal{M}^* = \{M \in \mathcal{M} : \dim \mathcal{J}(M) = r + 3\}$ は、非退化な極小曲面がなす \mathcal{M} の部分集合とする。

定理 9.2. (論文の定理 6.7) \mathcal{M}^* は \mathcal{M} の開集合である。特に、 \mathcal{M}^* は空であるか、または $(r + 3)$ 次元の実解析的多様体である。

\mathcal{G} は、水平な平行移動と x_3 -軸で生成される 3 次元 Lie 群とする。

定理 9.3. (論文の定理 8.1) \mathcal{M}^* は空でないとき、商多様体 $\mathcal{M}^*/\mathcal{G}$ は well-defined で、写像

$$f : \mathcal{M}^*/\mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}^{2r} \quad f([M]) = (\log(M), \text{height}(M))$$

は実解析的な Lagrangian はめ込みとなる。

10 相対 weight を巡る話題

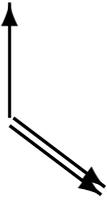
本節の内容の一部は、野村健二氏（元大阪市立大学・現日立公共システムエンジニアリング）との共同研究に基づくものである。

Cosín-Ros の結果は非常に elegant である。しかし、 $\text{end } q_1, \dots, q_n$ が \hat{C} 内の同一円上に並んでおり、そのことによって end に自然に順番が付けられることを本質的に用いている。従って、この条件を満たさない一般の n -end catenoid について、退化の様子を調べるためには、他の approach が必要となる。

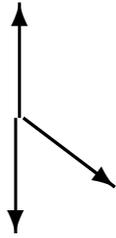
既に見たように、一般に、 n -end catenoid の任意の列は、有限個の（分岐点を持つかもしれない）極小曲面の和に収束することが知られている。この収束は、極限で無限小極小曲面または分岐点となる点を除いた集合上の広義 C^k -収束 ($k \in \mathbf{N}$) であり、二つの極限曲面間の距離は無限大かも知れない。

ここで少し $n = 3$ の場合について、その退化の様子を見てみよう。

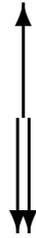
$n = 3$ のとき、 $\sum_{j=1}^3 a_j v_j = 0$ を満たすためには、 v_1, v_2, v_3 は 3次元をはることはできず、対応する 3-end catenoid が存在するためには、 v_1, v_2, v_3 のどの二つも平行でないことが必要十分条件である。ここで、各 v_1, v_2, v_3 に対し、比 $a_1 : a_2 : a_3$ は唯一つに定まり、それらを実現する 3-end catenoid はそれぞれ一意である。そこで、 v_1, v_2, v_3 のどれか少なくとも二つが平行になろうとするとき、3-end catenoid がどのように変形するかを、次の四つの場合に分けて観察してみることにする。



(O) $\pm v_j \neq v_k = v_l$



(A) $-v_j = v_k \neq \pm v_l$



(B) $-v_j = v_k = v_l$



(C) $v_j = v_k = v_l$

ただし $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ とする。

まず、条件 (O) であるが、これは一つ平面型 end を含む極小曲面に対応しており、3-end catenoid にならないと言うだけで、本質的な障害ではない。これらの曲面は Lopez-Ros 曲面と呼ばれている。

他の条件は本質的である。

条件 (A) に近付くと、end q_ℓ の weight は 0 にならざるを得ないのだが、そこで、これが平面型の end として残ることはかなわず、3-end catenoid は catenoid と平面に分かれてしまう。それらを隔てるのは無限小の catenoid が作る neck であり、二つの極限曲面は接することになる。

条件 (B) に近付くと、3-end catenoid は二つの catenoid に分かれる。それらを隔てるのは共有する end の中間に横たわる平面で、全ての weight を 0 に近付けない限り、二つの catenoid は無限大の距離に離れてゆくことになる。

条件 (C) に近付くと、3-end catenoid は三つの平面に分かれる。それらを slit でつなぐのは二つの無限小の Enneper 曲面である。結果、三つの極限平面は重なることになる。

と言う訳で、ここに三つの型の退化が見られたことになる。これらはもちろん、 $n \geq 4$ の場合でも一般的に見られる現象である。(A),(B) は Alexandrov embedded の場合にも見られるが、(C) は一般の場合に初めて現れる。

しかし、 $n \geq 4$ では、各 (v, a) に対して、 n -end catenoid は一意ではなく、上記のような現象も、 (v, a) だけでは捉えることができない。実際、既に述べたように、同じ (v, a) について、退化する例としない例が共存しているのである。

そこで、野村氏と筆者は、各 $w(q_j) = a_j$ を

$$\sum_{k=1; k \neq j}^n w_{jk} = w(q_j) \quad (j = 1, \dots, n), \quad w_{kj} = w_{jk} \quad (j \neq k)$$

を満たす w_{jk} に分解することを考えた。具体的に言うと、 n -end catenoid の Weierstrass data は、

$$g = \frac{P}{Q}, \quad \eta = -Q^2 dz,$$
$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{z - q_j}, \quad P = \sum_{j=1}^n \frac{p_j b_j}{z - q_j}, \quad (p_j = g(q_j))$$

の形をとり、ここで end q_j の weight は、

$$w(q_j) = \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j}$$

で与えられる (ここまでは KUY '97)。

その値が \mathbb{R}^3 の合同変換や \hat{C} の共形変換によらないことは言うまでもないが、実は

$$w_{jk} := b_j b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j}$$

もまた、それらによらないのである。この w_{jk} を end 対 (q_j, q_k) の相対 weight と呼ぶことにする。 w_{jk} は Hopf 微分 ηdg にも自然に現れる量であるが、Hopf 微分の不変性からは w_{jk} の不変性は導かれない。

n -end catenoid が well-defined であるためには、 w_{jk} は

$$\sum_{k=1; k \neq j}^n \frac{\bar{p}_j p_k + 1}{p_k - p_j} w_{jk} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

も満たす必要がある。

$$w_{jk}^* := \overline{b_j} b_k \frac{\overline{p_j} p_k + 1}{q_k - q_j}$$

とおけば、この条件は

$$\sum_{k=1; k \neq j}^n w_{jk}^* = 0$$

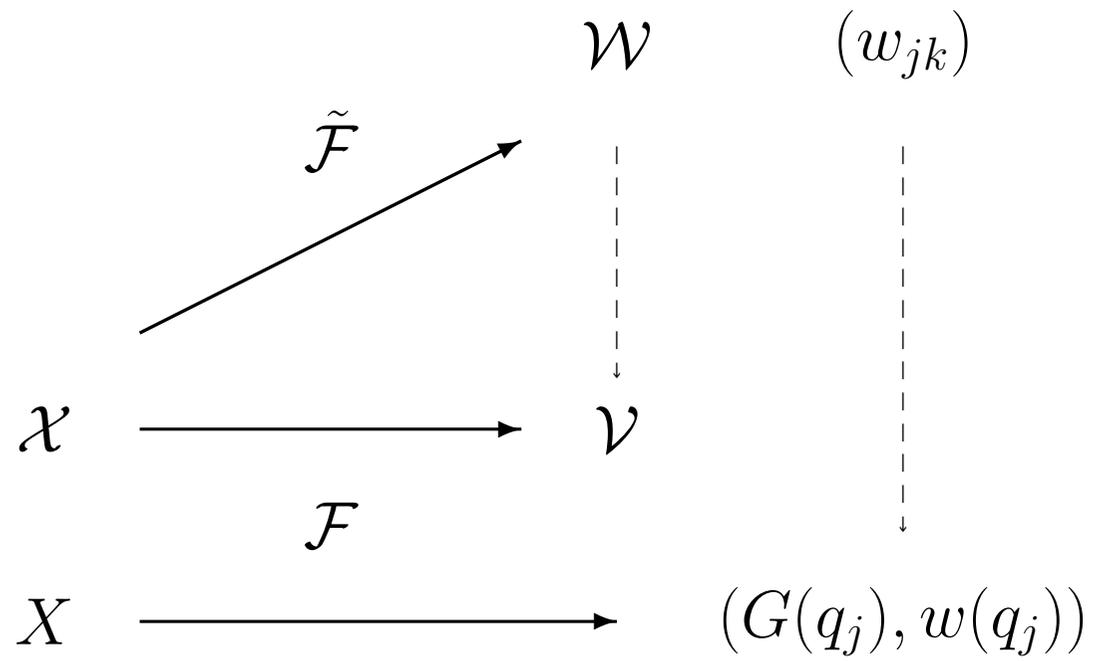
と書ける。 w_{jk}^* は絶対値のみ不変な量である。

$$\mathcal{W} := \{(w_{jk})_{j < k} \in \mathbf{C}^{n(n-1)/2} \mid \sum_{j=1}^n w_{jk} \in \mathbf{R}, +\alpha\}$$

とおき、次の写像を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{W} \\ X &\mapsto (w_{jk}) \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ は generic には 1 対 1 であるような \mathcal{F} の lift である。



ここで w_{jk} は $p_j = p_k$ (すなわち $v_j = v_k$) のとき、その定義から自動的に 0 となってしまうので、さらに

$$m_{jk} := \max\{|w_{jk}|, |w_{jk}^*|\}$$

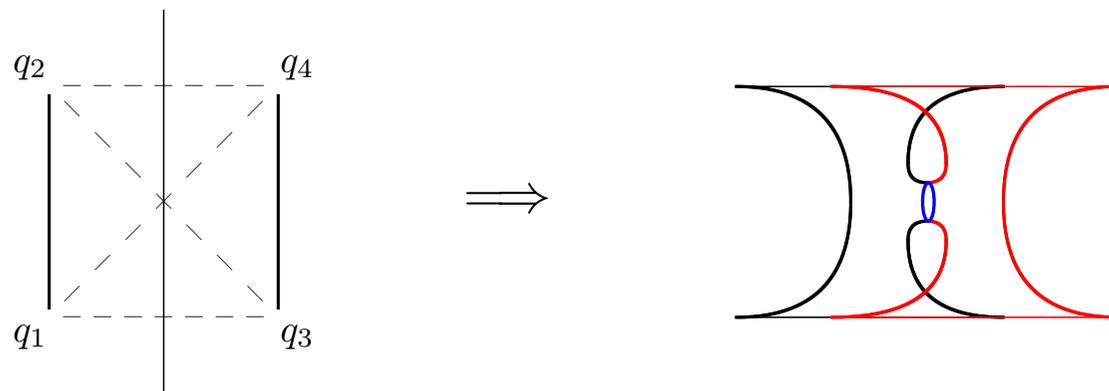
を定義し、これらを用いて次の結果を得た。

定理 **10.1.**(KN,K)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \leq m_{jk} \leq C_2 \quad (j, k = 1, \dots, m \text{ or } j, k = m + 1, \dots, n \\ \quad ; j \neq k), \\ \epsilon_1 \leq m_{jk} \leq \epsilon_2 \quad (j = 1, \dots, m ; k = m + 1, \dots, n) \end{array} \right.$$

を満たす正定数 $C_1, C_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ が存在して、 ϵ_1, ϵ_2 が十分小さいとき、end q_1, \dots, q_m と end q_{m+1}, \dots, q_n を分ける最短閉測地線の長さは $l \leq C\epsilon_2$ を満たす。ここで C は、 $C_2/C_1, \epsilon_2/\epsilon_1, n$ のみによる正定数である。

m_{jk} が大きいとき実線で、小さいとき破線で表すことにすると、



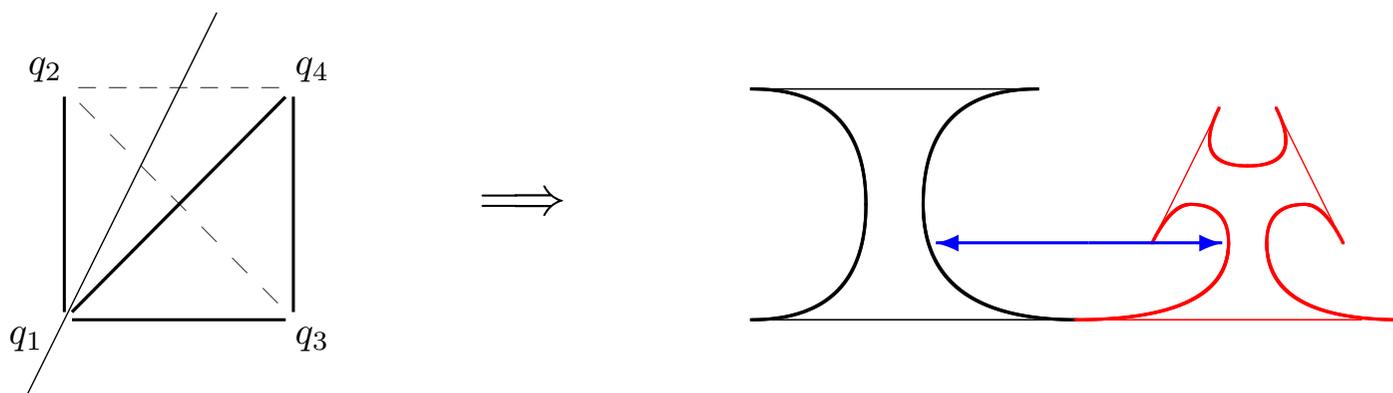
ということである。

特に $m = 1$ または $n - 1$ のときは、仮定の内、「 $\leq C_2$ 」、
 「 $\epsilon_1 \leq$ 」は必要無いこともわかる。定理 10.1 は $n = 3$ の場合
 の障害 (A) に対応している。

定理 10.2.

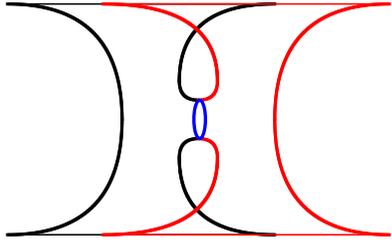
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \leq m_{jk} \leq C_2 \quad (j, k = 2, \dots, m \text{ or } j, k = m + 1, \dots, n \\ \quad \text{or } j = 1 \text{ or } k = 1; j \neq k), \\ m_{jk} \leq \epsilon_2 \quad (j = 2, \dots, m; k = m + 1, \dots, n), \end{array} \right.$$

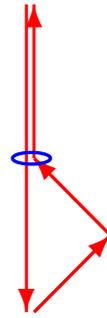
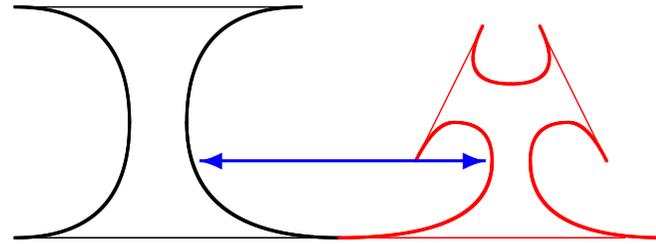
を満たす正定数 C_1, C_2, ϵ_2 が存在して、 ϵ_2 が十分小さいとき、
end q_2, \dots, q_m を他から分ける neck と、end q_{m+1}, \dots, q_n を他
から分ける neck の間の距離は $d \geq C/\epsilon_2$ を満たす。ここで C
は、 $C_2/C_1, n$ のみによる正定数である。

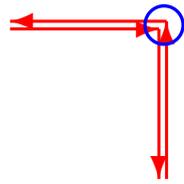
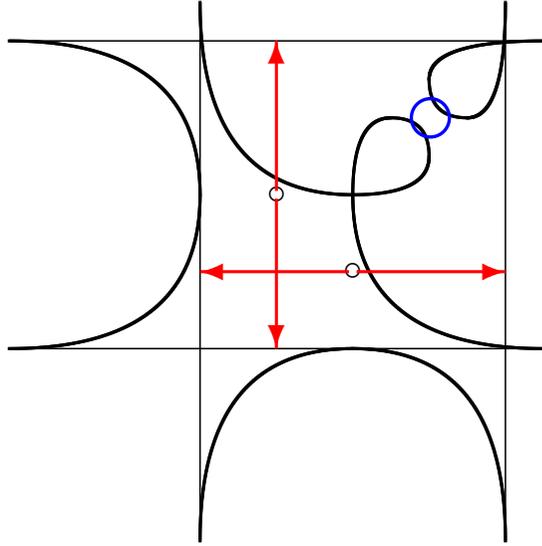


とすることで、定理 10.2 は $n = 3$ の場合の障害 (B) に対応している。

定理 10.1, 10.2 それぞれの仮定の下で、 $\epsilon_2 \rightarrow 0$ とすると、 n -end catenoid の収束の様子も具体的に見ることができる。







三つ目は、少し趣を異にする。よく知られているように、 $n = 3$ の場合の障害 (C) は、一般の n についても障害である。この障害 $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$ の近くでは、何が起きているのかと言うと……、

定理 10.3. $0 < t < \pi$ とする。

$$\begin{cases} C_1 \leq m_{jk} \leq C_2 & (j, k = 1, \dots, n; j \neq k), \\ \angle(v_j, v_k) \leq \epsilon_2 & (j, k = 1, \dots, n). \end{cases}$$

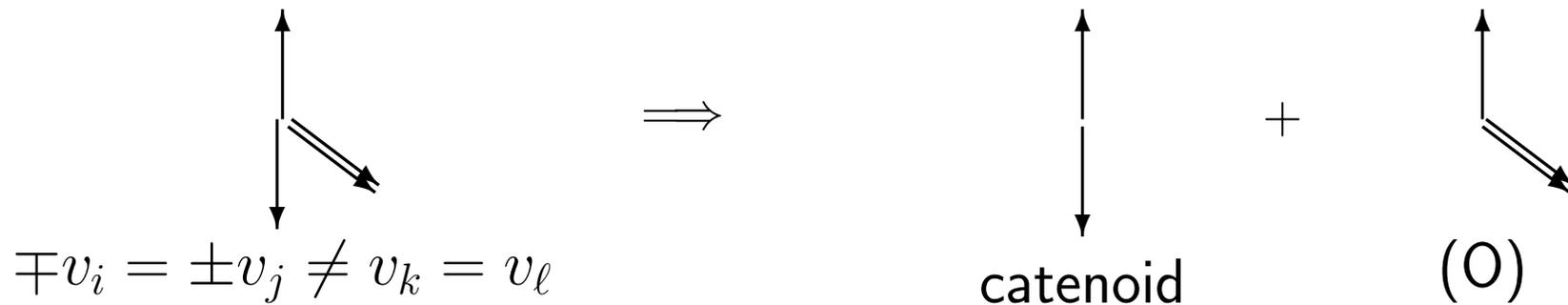
を満たす正定数 C_1, C_2, ϵ_2 が存在して、 $\epsilon_2 \leq t/2$ のとき、 $\angle(G(z), v_1) \geq t$ を満たす (つまり end の limit normal と一定角度離れた normal を持つ) $z \in \hat{C}$ 全体の集合の X による像の曲面積は

$$A(t) \leq \frac{C \cdot C_2^2}{\cos^4(t/2)} \left(\frac{\epsilon_2}{t}\right)^4$$

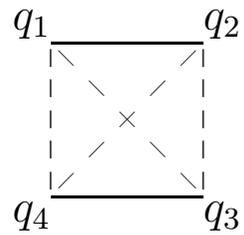
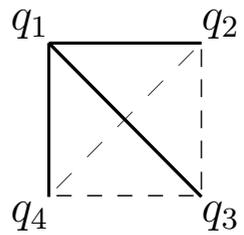
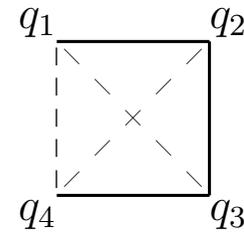
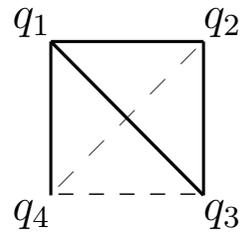
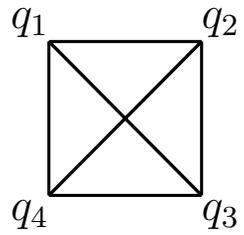
を満たす。ここで C は、 $C_2/C_1, n$ のみによる正定数である。

実は、 $X(M)$ の Gauss 曲率は、高々 $n - 1$ 個の点の近傍に集中する。ここでその点に現れるのは catenoid ではなくて、Enneper 曲面等である。

現時点で知られている一例も存在しないような障害は、limit normal が 1 次元をはる場合がほとんどで、唯一の例外が $\mp v_i = \pm v_j \neq v_k = v_\ell$ である（ $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ とする）。4 個の end の大きさを一定範囲に保ったまま、 v をこの配置に近付けて行くとどうなるか調べてみると、実は定理 10.2 の場合に相当していることがわかる。



$n = 4$ で考えられる全ての型を書いておくと、次のようになる。それぞれ、どのような極限に収束するだろうか？



今後の課題であるが……。

Traizet の二つの仕事においても、その極限状態を制約する条件を記述する際に $\frac{b_j b_k}{q_k - q_j}$ が現れる。これはその状態が、単独では存在しえない n -end catenoid (のようなもの) として表されていることによる。ただし、埋め込みの場合には、全ての end が平行でなければならないので、 $p_k - p_j$ もしくは $\bar{p}_j p_k + 1$ の部分は現れて来ないし、また、flux 公式に加えて Pérez の条件が重要となる。

これと「中程」の解をつなぐ道具として、前節同様の事実が、種数 1 以上の場合についても期待される。実際、種数 1 では、Costa 曲面や種数 1 の Jorge-Meeks 曲面（Rossman 氏による）を含む族について相対 weight が定義できるのであるが、その応用については、今の所未開拓である。或いは、これらだけでは、退化の様子を捕まえるには不十分であるかもしれない。

A 種数 1 の場合

種数 0 すなわち $\overline{M} = S^2$ の場合に、 n -noid について多くのことがわかって来ると、次に一般種数の場合が気になるのは当然の流れである。

しかし残念ながら、種数 1 の場合に限っても、一般的存在を示すことは、かなり厳しいと言わざるを得ないのが現状である。もっとも、Weierstrass data の一般形を整理し、存在条件を書き下すことは可能であり、このことにより、多くの新しい例を構成できる。本節では、室谷文祥氏（府大高専）との共同研究に基づき、そのあらましについてお話したい。

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ は $\text{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ を満たすものとし、
 $\overline{M} = T^2 := \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$ とおく。 $X : M = T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\}$
 は n -noid すなわち n 個の埋め込まれた end のみを持つ全曲率
 有限完備共形極小はめ込みとする。 (g, η) を X の Weierstrass
 data とする。ここで各 end における limit normal は真上(北極方
 向)を向かない、すなわち $p_1 = g(u_1), \dots, p_n = g(u_n)$ は ∞ では
 ないと仮定して、一般性を失わない。(これは \mathbf{R}^3 内の回転によ
 り、この条件を満たすよう合同変換できると言う意味である。)

今、全曲率有限完備と言う仮定から、 g, η はそれぞれ、 $\overline{M} = T^2$ 上の有理型関数、有理型 1-形式である。言い換えると、 $g, \frac{\eta}{du}$ は共に基本周期 (ω_1, ω_2) の楕円関数である。特に $\eta, g^2\eta$ の少なくとも一方は、 u_1, \dots, u_n を極として持つ。各 end が埋め込まれた end という仮定から、その位数は 2 である。これらの極の中に、 $g^2\eta$ の極ではあるが η の極ではないものが存在すると、そこでの limit normal が ∞ となるが、これは仮定に反するので、結局 η が u_1, \dots, u_n の全てを極として持ち、 $g^2\eta$ も含めて、他に極は無い。従って、 g^2 の極が $g^2\eta$ の極となって残らないために、 g^2 の極は η の零点でなければならない。

さらに、ここで $X(M)$ の Riemann 計量が $(|\eta| + |g^2\eta|)^2$ で与えられることから、分岐点が存在しないための必要十分条件は、 η と $g^2\eta$ が共通零点を持たないことである。従って、 η の零点は $g^2\eta$ の零点であってはならないので、必然的に g^2 の極でなければならない。以上まとめると $g, \frac{\eta}{du}$ はそれぞれ位数 $n, 2n$ の楕円関数で、 g の極と $\frac{\eta}{du}$ の零点は全て共通かつ位数は後者が前者のちょうど 2 倍となっている。

ここまでの考察は、実は種数 0 の場合とほとんど共通で、これを種数 0 に関する記述とするには、楕円関数を有理関数に読み替え、 g の位数を $n - 1$ に落としさえすればよい。この違いは、種数 0 では dz が ∞ で 2 位の極を持つため、これが η の極とならないよう $\frac{\eta}{dz}$ の分子の次数を 2 落とす必要があるために生じる。そして、種数 0 の n -noid は、Weierstrass data が、

$$g(z) = C_1 \frac{(z - s_1) \cdots (z - s_{n-1})}{(z - t_1) \cdots (z - t_{n-1})}, \quad \eta = - \left\{ C_2 \frac{(z - t_1) \cdots (z - t_{n-1})}{(z - q_1) \cdots (z - q_n)} \right\}^2 dz$$

の形で与えられ、

$$P(z) := C_1 C_2 \frac{(z - s_1) \cdots (z - s_{n-1})}{(z - q_1) \cdots (z - q_n)}, \quad Q(z) := C_2 \frac{(z - t_1) \cdots (z - t_{n-1})}{(z - q_1) \cdots (z - q_n)}$$

と置くことにより、

$$g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \eta = -Q(z)^2 dz$$

と表せて、 $P(z)$, $Q(z)$ に部分分数分解

$$P(z) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{z - q_j}, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{z - q_j}$$

を施すことで、以下の処理が簡略化され、

$$\begin{cases} w_j := -p_j R_{0j} + R_{1j}, \\ w_j^* := -\frac{1}{2}(|p_j|^2 - 1)R_{0j} + \bar{p}_j R_{1j} \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

とおけば、 n -noid の存在条件は

$$\begin{cases} w_j = \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k \frac{p_j - p_k}{q_j - q_k} \in \mathbf{R}, \\ w_j^* = -\sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k \frac{\bar{p}_j p_k + 1}{q_j - q_k} = 0 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

と書き下されたのであった。

同様のことを種数 1 で、そのまま行うことはできないので、代替手段として、とりあえず、Weierstrass の楕円関数を用いることにする。簡単にその定義と必要な性質をまとめておこう。まず、

$$\omega_{(m,n)} := m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n) \in \mathbf{Z}^2$$

とし、

$$\sum_{(m,n)} := \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}, \quad \sum'_{(m,n)} := \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2; (m,n) \neq (0,0)} \quad \prod'_{(m,n)} := \prod_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2; (m,n) \neq (0,0)}$$

と略記するものとする。

Weierstrass の \wp 関数、 ζ 関数、 σ 関数は、それぞれ次式で定義される。

$$\wp(u) := \frac{1}{u^2} + \sum'_{(m,n)} \left\{ \frac{1}{(u - \omega_{(m,n)})^2} - \frac{1}{\omega_{(m,n)}^2} \right\},$$

$$\zeta'(u) = -\wp(u),$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\zeta(u) - \frac{1}{u} \right) = 0,$$

$$(\log \sigma(u))' = \zeta(u),$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

$\wp(u)$ は次を満たす。

$$\begin{aligned}\wp(u + \omega_1) &= \wp(u + \omega_2) = \wp(u), \\ \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + O(u^2).\end{aligned}$$

すなわち周期 (ω_1, ω_2) を持つ (つまり T^2 上で well-defined な) 偶関数で、 $\omega_{(m,n)}$ ($(m, n) \in \mathbf{Z}^2$) で 2 位の極を持つ有理型関数である。

一方 $\zeta(u)$ は次を満たす。

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{(m,n)} \left(\frac{1}{u - \omega_{(m,n)}} + \frac{1}{\omega_{(m,n)}} + \frac{u}{\omega_{(m,n)}^2} \right),$$

$$\zeta(u + \omega_j) = \zeta(u) + \eta_j \quad (j = 1, 2),$$

$$\eta_j := 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (j = 1, 2),$$

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi\sqrt{-1} \quad (\text{Legendre の関係式})$$

すなわち T^2 上 well-defined ではないが、擬周期を持つ奇関数で、後述するように、これを用いて、 T^2 上 1 位の極のみを持つ任意の有理型関数を表すことができる。

また $\sigma(u)$ は次を満たす。

$$\sigma(u) = u \prod'_{(m,n)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\omega_{(m,n)}} \right) \exp \left(\frac{u}{\omega_{(m,n)}} + \frac{u^2}{2\omega_{(m,n)}^2} \right) \right\},$$

$$\sigma(u + \omega_1) = -e^{\eta_1(u + \omega_2/2)} \sigma(u),$$

$$\sigma(u + \omega_2) = -e^{\eta_2(u + \omega_1/2)} \sigma(u).$$

すなわち T^2 上 well-defined ではないが、やはり擬周期を持ち、これを用いて、 T^2 上の任意の有理型関数を表すことができる。

例えば $s_1, \dots, s_n \in T^2, t_1, \dots, t_n \in T^2$ にそれぞれ零点と極を持つ $g(u)$ は、

$$g(u) = C_1 \frac{\sigma(u - s_1) \cdots \sigma(u - s_n)}{\sigma(u - t_1) \cdots \sigma(u - t_n)}$$

である。ただし、 $g(u)$ が周期 (ω_1, ω_2) を持つためには、分母分子の $\sigma(u - \cdot)$ の擬周期が互いに打ち消し合うよう、

$$s_1 + \cdots + s_n = t_1 + \cdots + t_n$$

を満たすように代表元を選ぶ必要がある。 s_1, \dots, s_n を $g(u)$ の零点の完全代表系、 t_1, \dots, t_n を $g(u)$ の極の完全代表系と呼ぶ。このように $\sigma(u)$ を u の代わりにして、 $g(u)$ を一つの分数式にまとめて表すことができるのである。

$\frac{\eta}{du}$ についても同様であるが、こちらは一つ問題が残る。とりあえず、 $t_1, \dots, t_n \in T^2$, $u_1, \dots, u_n \in T^2$ にそれぞれ 2 位の零点と極に持つ (重複する場合は重複分別に取る) ことから、

$$\eta = -C_2^2 \frac{\sigma(u - t_1)^2 \cdots \sigma(u - t_{n-1})^2}{\sigma(u - u_1)^2 \cdots \sigma(u - u_{n-1})^2} \frac{\sigma(u - t_n)^2}{\sigma(u - u_n) \sigma(u - u_n - \omega)} du$$

を得るが、ここで、全て偶数位数である零点と極、それぞれの和を一致させるためには、代表元を全て共通に取れるとは限らず、

$$2(t_1 + \cdots + t_{n-1} + t_n) = 2(u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n) + \omega$$

を満たすように

$$\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$$

のいずれかを選ぶしかない。

つまり、零点も極も全て偶数位数であっても、ある楕円関数の平方となるとは限らない(つまり $\sqrt{\frac{\eta}{du}}$ がとれるとは限らない) ということである。

ここで、もし $\omega = 0$ ととれたならば、種数 0 の場合同様に
して、

$$P(u) := C_1 C_2 \frac{\sigma(u - s_1) \cdots \sigma(u - s_n)}{\sigma(u - u_1) \cdots \sigma(u - u_n)}, \quad Q(u) := C_2 \frac{\sigma(u - t_1) \cdots \sigma(u - t_n)}{\sigma(u - u_1) \cdots \sigma(u - u_n)}$$

とおくことにより、

$$g(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}, \quad \eta = -Q(u)^2 du$$

と表せて、さらにこの $P(u)$, $Q(u)$ を、部分分数分解の代わりに、今度は $\zeta(u)$ を用いて、

$$P(u) = \sum_{j=1}^n c_j \zeta(u - u_j) + c_0, \quad Q(u) = \sum_{j=1}^n b_j \zeta(u - u_j) + b_0$$

と分解することができる。

ただし、 $\zeta(u - \cdot)$ の擬周期が互いに打ち消し合って、 $P(u)$, $Q(u)$ がそれぞれ周期 (ω_1, ω_2) を持つためには、係数の総和が 0, すなわち

$$c_1 + \cdots + c_n = 0, \quad b_1 + \cdots + b_n = 0$$

が成り立たなければならず(これは留数定理からの帰着でもある)、さらに、極の代表元の選び方によって、 c_0, b_0 は取り替える必要があるため、この分解には、有理関数の部分分数分解のような厳密な意味での一意性はない。

それでも、これで以下の処理は簡略化され、各 end の回りの局所的な周期が閉じるための条件は、次のように書き下される。

$$\begin{cases} w_j = \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k (p_j - p_k) \zeta(u_j - u_k) + (p_j b_j b_0 - b_j c_0) \in \mathbf{R}, \\ w_j^* = - \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k (\bar{p}_j p_k + 1) \zeta(u_j - u_k) - (\bar{p}_j b_j c_0 + b_j b_0) = 0 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n).$$

ただし $\bar{M} = T^2$ の場合は、さらに 1 次 homology 群の 2 個の生成元に関する大域的な周期が閉じるための条件も必要である。

ところが、それ以前にまず、文献上に見られる既知の例のほとんど、特に catenoid 型の end を持つものについては全て、実はこの $\omega = 0$ の場合は当てはまらず、唯一の例外が、Costa による 4 個の平面型 end のみを持つ例(有名な Costa 曲面とは別物)であり、その共形類を動かしてできる Kusner-Schmitt の 2 parameter 族であった。

この段階で主要な問題点は次の二つであった。

- (1) 既知の例のほとんどは $\omega \neq 0$ の場合と言うことになるが、これらを統一的に扱う表示は、どうしたら得られるか？
- (2) $\omega = 0$ で catenoid 型の end を持つものは、そもそも存在するのか？

(1) については、一見 $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ の 3 通りに見えるが、実は同値な基本周期の取替により、 $\omega = \omega_2$ の場合と読み替えられるので、以下そのように記すことにする。

結論から述べると、この場合については、周期平行四辺形を用いた T^2 の表示 $T^2 = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$ よりも、擬周期円環領域を用いた表示の方が、より有効であることがわかった。

まず、

$$r := \exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

とおき、 $\mathbf{C}^* := \mathbf{C} \setminus \{0\}$ の元の間値関係を

$$z \sim z' \iff z' = zr^\ell \text{ for some } \ell \in \mathbf{Z}$$

により定義すれば、商集合 \mathbf{C}^*/\sim が定まり、写像

$$z : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*,$$

$$u \mapsto z(u) := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega_1}u\right)$$

が、 $T^2 = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$ と \mathbf{C}^*/\sim の間の双正則写像を引き起こす。

そこで、 $T^2 = \mathbf{C}^* / \sim$ と同一視して、 \mathbf{C}^* の座標 z を局所座標として用いれば、 $\sqrt{\frac{\eta}{dz}}$ が取れて、 \mathbf{C}^* 上の有理型関数 $P(z)$, $Q(z)$ を用いて

$$g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \eta = -Q(z)^2 dz$$

と表せたのである。

ここで、 $P(z)$, $Q(z)$ を分解するには、 $\zeta(u)$ の代わりにする次の関数を用いるのが有効である。

$$h(z, q) := \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{r^{l/2}}{z - qr^l} = \frac{1}{z - q} + h_0(z, q),$$
$$h_0(z, q) := \sum_{l=-\infty; l \neq 0}^{+\infty} \frac{r^{l/2}}{z - qr^l}.$$

この表記は今回の目的に合わせて新たに導入したもので、一般的なものではない。

Weierstrass の楕円関数を用いて $h(z) := h(z, 1)$ を表すと、次のようになる。

$$z(u)h(z(u))^2 = \left(\frac{\omega_1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \left(\wp(u) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

$$h(z(u)) = \frac{\omega_1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{(-1)}{\sigma(\omega_2/2)} \exp \left\{ \left(\frac{\eta_2}{2} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\omega_1} \right) u \right\} \frac{\sigma(u - \omega_2/2)}{\sigma(u)}.$$

因みに、Kusner-Schmitt は、これとは異なる形で楕円関数を組み合わせて、 $\omega \neq 0$ で平面型 end のみを持つ場合を扱っている。

$$r^{1/2} := \exp\left(-\pi\sqrt{-1}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

とするとき、 $h(z, q)$ は次を満たす。

$$h(z, q) = \frac{1}{q} h\left(\frac{z}{q}, 1\right),$$

$$h_0(z, q) = \frac{1}{q} h_0\left(\frac{z}{q}, 1\right),$$

$$h(rz, q) = r^{-1/2} h(z, q),$$

$$h(r^{1/2}q, q) = 0,$$

$$h_0(q, q) = 0.$$

$h(z, q)$ も T^2 上 well-defined ではないが、これを用いると、上の $P(z), Q(z)$ は、

$$P(z) = \sum_{j=1}^n c_j h(z, q_j), \quad Q(z) = \sum_{j=1}^n b_j h(z, q_j).$$

のように表される。

この表示を用いて得られた局所的な周期条件は、次の通りである。

$$\begin{cases} w_j = \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k (p_j - p_k) h(q_j, q_k) \in \mathbf{R}, \\ w_j^* = - \sum_{k=1; k \neq j}^n b_j b_k (\overline{p_j} p_k + 1) h(q_j, q_k) = 0 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n).$$

この表記の利点の一つは、handle をつぶして T^2 を S^2 に変形するとき、曲面の退化の様子が見やすいことである。実際 $r \rightarrow \infty$ とするとき、円環領域の幅が限りなく大きくなり、 T^2 自身は \mathbf{C}^* に、そして $h(z, q)$ は $\frac{1}{z - q}$ に収束するのである。

もっとも、いずれの場合においても、種数 0 の場合同様に処理可能なのは、各 end の回りの局所的な周期計算のみで、 T^2 の 1 次 homology 群の生成元である handle を回る loop に関する周期計算には、別の評価が必要である。

$\omega = \omega_2$ の場合については、そのためにさらに、次の関数も導入する。

$$h_1(z, q) := \sum_{l=-\infty; l \neq 0}^{+\infty} \frac{\ell r^{\ell/2}}{z - qr^{\ell}}.$$

$h_1(z, q)$ は次を満たす。

$$h_1(z, q) = \frac{1}{q} h_1\left(\frac{z}{q}, 1\right),$$

$$h_1(rz, q) = r^{-1/2} (h_1(z, q) + h(z, q)),$$

$$h_1(-q, q) = 0.$$

この関数は、円環をなす円周に沿う周期の計算に極めて有効で、

$$R = 1 - \epsilon,$$

$$1 \leq |q_j| < |r| - \epsilon \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\gamma_1 : z(t) = Re^{\sqrt{-1}t} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ととれば、例えば

$$\begin{aligned} R_1(\gamma_1) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_1} (-P(z)Q(z))dz \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_j c_k h_1(q_j, q_k) \end{aligned}$$

と記述される。

もう一つの生成元については、もう少し面倒で、

$$\gamma_2 : z(t) = z_0 r^t = z_0 |r|^t e^{\sqrt{-1}t \arg r} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ととれば、

$$\begin{aligned} R_1(\gamma_2) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_2} (-P(z)Q(z)) dz \\ &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \left\{ - \sum_{j=1}^n \frac{c_j b_j}{q_j} - \log r \cdot R_1(\gamma_1) + \sum_{j=1}^n \log q_j \cdot R_{1j} \right\} \end{aligned}$$

となる。

ただし \log の偏角は、 $0 < \arg r < 2\pi$ のときは、 $t_j := \log_{|r|} |q_j|$ に対して $0 < \arg q_j - \arg z_0 r^{t_j} < 2\pi$ すなわち

$$\arg z_0 + t_j \arg r < \arg q_j < \arg z_0 + t_j \arg r + 2\pi \quad (j = 1, \dots, n)$$

を満たすように、また $\arg r = 0$ のときは、

$$0 < \arg q_j - \arg z_0 < 2\pi \text{ すなわち}$$

$$\arg z_0 < \arg q_j < \arg z_0 + 2\pi \quad (j = 1, \dots, n)$$

を満たすように、それぞれ選ぶものとする。 $R_0(\gamma_2), R_2(\gamma_2)$ についても同様で、これらを用いて、大域的な周期条件

$$R_0(\gamma_i) + \overline{R_2(\gamma_i)} = 0, \quad R_1(\gamma_i) \in \mathbf{R} \quad (i = 1, 2)$$

を書き下すことができる。

$\omega = 0$ の場合の大域的な周期条件も、end の完全代表系 $\{u_1, \dots, u_n\}$ と $u_0 \in \mathbf{C}$ を

$$\{u_1, \dots, u_n\} \subset \{u_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_1, t_2 \in (0, 1)\}.$$

を満たすように選び、 γ_i ($i = 1, 2$) として u_0 と $u_0 + \omega_i$ を結ぶ線分をとれば、

$$\xi_i(u) := \left(\wp(u) - \frac{2\eta_i}{\omega_i} \right) - \left(\zeta(u) - \frac{\eta_i u}{\omega_i} \right)^2$$

を用いて

$$R_1(\gamma_i) = \frac{-\omega_i}{2\pi\sqrt{-1}} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1; k \neq j}^n (c_j b_k + b_j c_k) \xi_i(u_j - u_k) \right. \\ \left. + \left(c_0 - \eta_i \sum_{j=1}^n c_j \frac{u_j}{\omega_i} \right) \left(b_0 - \eta_i \sum_{j=1}^n b_j \frac{u_j}{\omega_i} \right) \right\}$$

と表せて、さらに二つの周期の間には、

$$R_1(\gamma_2) = \frac{\omega_2}{\omega_1} R_1(\gamma_1) - \frac{1}{\omega_1} \sum_{j=1}^n (c_j b_j - R_{1j} u_j)$$

と言う関係式もあるので、これらを用いて $\omega = \omega_2$ の場合同様に、大域的な周期を書き下すことができる。

ところで問題の (2) であるが、実は $\omega = \omega_2$ の n -noid X に対して、

$$\tilde{\omega}_1 := 2\omega_1, \quad \tilde{T}^2 := \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\tilde{\omega}_1 + \mathbf{Z}\omega_2), \quad u_{n+j} := u_j + \omega_1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

とおけば、二重被覆 $\tilde{X} : \tilde{T}^2 \setminus \{u_1, \dots, u_{2n}\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $\tilde{\omega} = 0$ の $2n$ -noid と見なせる。

実際、仮定より X は $\omega = \omega_2$ なので、

$$2(u_1 + \cdots + u_n) + \omega_2 = 2(s_1 + \cdots + s_n)$$

が成り立っているが、ここで

$$s_{n+j} := s_j + \omega_1, \quad t_{n+j} := t_j + \omega_1 \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

$$s_{2n} := s_n + \omega_1 - \omega_2, \quad t_{2n} := t_n + \omega_1 - \omega_2$$

とおくと、 $\{s_1, \dots, s_{2n}\}, \{t_1, \dots, t_{2n}\}$ はそれぞれ \tilde{g} の極と零点の完全代表系となり、

$$s_1 + \cdots + s_{2n} = t_1 + \cdots + t_{2n}$$

が成り立つ一方で、

$$2(u_{n+1} + \cdots + u_{2n}) - \omega_2 = 2(s_{n+1} + \cdots + s_{2n})$$

も満たすので、

$$2(u_1 + \cdots + u_{2n}) = 2(s_1 + \cdots + s_{2n})$$

を得る。

従って、この \widetilde{X} を、二重被覆にならないように変形すれば、 $\omega = 0$ の例は、いくらでも作れることが分かった。

注 $\omega = \omega_2$ の場合の $h(z, q_j)$ に対応するものとして
Kusner-Schmitt が用いたのは

$$\begin{aligned} & \left(\zeta(u - u_j) - \zeta(u) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - u_j\right) + \zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{\wp_r(u)}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\wp_r(u)\wp_r'(u_j) + \wp_r'(u)\wp_r(u_j)}{\wp_r(u_j)(\wp_r(u) - \wp_r(u_j))} \right) \frac{1}{\sqrt{\wp_r(u)}} \end{aligned}$$

である。但し

$$\wp_r(u) := \wp(u) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

とする。あくまでも u を変数とする二重周期の楕円関数を用いるために、dammy の(最終的には現れない) end 0 を設けて、Weierstrass data を記述している。

ちなみに、 $\omega = 0$ の場合については

$$\zeta(u - u_j) - \zeta(u) + \zeta(u_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\wp'(u) + \wp'(u_j)}{\wp(u) - \wp(u_j)} \right)$$

を用いていて、こちらにも dammy の end 0 はあるものの、今回お話した方針は本質的にはこれと変わらない。

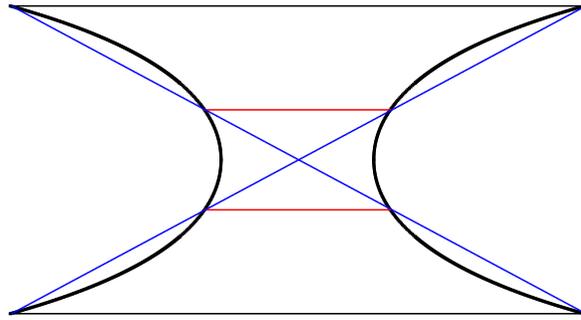
参考文献

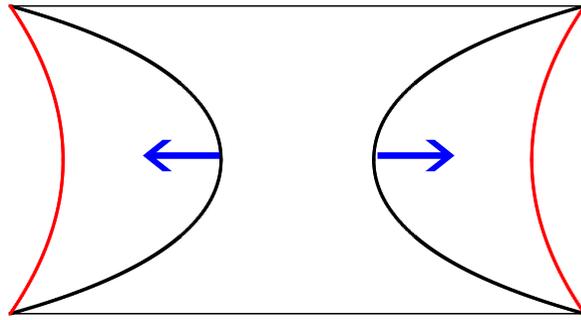
Kusner-Schmitt: The spinor representation of surfaces in space,
arXiv:dg-ga/9610005v1, 1996.

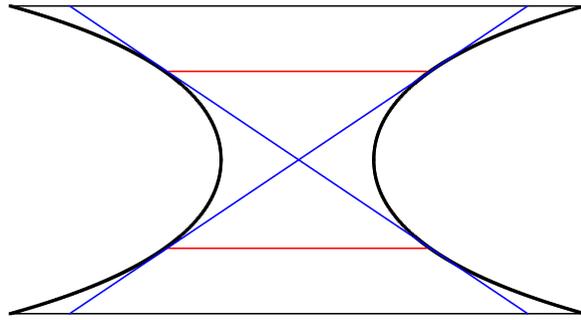
11 n -noid の index, nullity と flux

11.1 序

本節の内容は、立道康介氏（元大阪市立大学・現バンダイ）との共同研究に基づくものである。







極小はめ込み $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ の index 及び nullity は、面積汎関数の第二変分から得られる Jacobi 作用素を用いて定義されるが、有限全曲率完備共形極小はめ込みにおいては、定義域である Riemann 面 M の compact 化 \bar{M} の上に、球面の標準計量 $ds_{\mathbf{S}^2}^2$ の Gauss 写像 $G : \bar{M} \rightarrow \mathbf{S}^2$ による引き戻しとして与えられる退化 Riemann 計量 $G^*(ds_{\mathbf{S}^2}^2)$ に関する正值 Laplacian $-\Delta^*$ の 2 未満の固有値の個数及び固有値 2 の重複度と一致することが知られている。

よって、その値は G と立体射影 $\sigma : \mathbf{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の合成として得られる有理型関数 $g = \sigma \circ G$ (この関数もまた Gauss 写像と呼ばれる) のみに依存するため、 g の index 及び nullity という呼び方も併用される。この意味で、それぞれ $\text{Ind}(g)$, $\text{Nul}(g)$ と表す。

\mathbf{R}^3 の平行移動から誘導される有界な nullity 関数 (Jacobi 作用素の 0-固有関数もしくは $-\Delta^*$ の 2-固有関数) 全体の次元を考えれば、常に $\text{Nul}(g) \geq 3$ であることがわかる。いつ $\text{Nul}(g) > 3$ となるかについては、次の判定条件が知られている。

定理 11.1.(判定条件 1) (Ejiri-Kotani, Montiel-Ros) g が、分岐点を許容する flat-ended な完備極小はめ込みの Gauss 写像として実現されるとき、かつそのときに限り、 $\text{Nul}(g) > 3$ が成り立つ。

しかしながら、具体的に与えられた X もしくは g が、この判定条件を満たすか否かの判断は、一般には容易でなく、文献上で確認できる例も、そう多くはない。そこで、本研究では、埋め込まれた end のみを持つ有限全曲率完備共形極小はめ込み、所謂 n -noid に関心を絞って、判定条件 1 を、特にその flux vector を用いて記述することを試みた。

ここで言う flux vector とは、極小はめ込みの像 $X(M)$ の上の各閉曲線に対し、それに沿う unit conormal の積分として得られる vector のことである。発散公式より直ちに、flux vector は、閉曲線の連続変形で不変であることがわかる。

特に、有限全曲率完備共形極小はめ込みにおいては、その定義域として、compact Riemann 面から有限個の点を除いた領域 $M = \bar{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ をとることができ、その際除かれた各点 q_j の近傍の像である end に対し、その周囲を一周する閉曲線に沿い、定義域では内向き、像では外向きの unit conormal を積分して得られる flux vector φ_j を、その end q_j の flux vector と呼ぶ。再び発散公式または留数定理より、全ての end q_1, \dots, q_n を亘る flux vector の総和 $\sum_{j=1}^n \varphi_j$ は常に 0 となる。この均衡条件は flux 公式と呼ばれる。

有限全曲率の場合、埋め込まれた end q_j は catenoid または平面のいずれかに漸近し、その flux vector φ_j は limit normal $G(q_j) := \lim_{z \rightarrow q_j} G(z)$ と平行となるので、その比により、漸近 catenoid と標準的 catenoid の相似比が得られる。その値 $w(q_j) := \varphi_j / 4\pi G(q_j)$ を end q_j の weight と呼ぶ。但し向きが逆のとき、weight は負となり、また、平面に漸近する場合は、weight は 0 となる。全ての end の limit normal と weight の組 $(G(q_j), w(q_j))_{j=1}^n$ を flux data と呼ぶ。

特に種数 0 の場合、二つの有理関数 g_1 と g_2 は、 \hat{C} の二つの Möbius 変換 φ と F で $g_1 \circ \varphi = F \circ g_2$ を満たすものが存在するとき、同じ index と nullity を持つことが、判定条件 1 より従う。そこで本稿では、このような g_1 と g_2 を、同値であると言うことにする。

例**11.1.** (Gauss 写像の例 1) (Nayatani) $N, M \in \mathbf{N}$,

$N + M \geq 3$ に対し、 $g_{N\&M}(z) := z^N + z^{-M}$ とおく。

$\text{Ind}(g_{N\&M}) = 2d - 2 = 2(N + M) - 2$, $\text{Nul}(g_{N\&M}) = 5$ が成り立つ。

この $g_{N\&M}$ と同値な g を実現する n -noid として、次の例がある。

例**11.2.** (曲面の例 1) $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 3$, $p, a, a' \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$p \neq \pm 1$, $a' = Na(1 - p^2)/(1 + p^2)$, に対し、Weierstrass data

$$g_{\text{pyr}}(z) = \frac{(N - 1)(p^2 - 1)z^N + p^N \{(N + 1)p^2 + (N - 1)\}}{2Np^2 z^{N-1}},$$

$$\eta_{\text{pyr}} = -\frac{a}{2(N - 1)p^2(p^2 + 1)} \left(\frac{2Np^2 z^{N-1}}{z^N - p^N} \right)^2 dz$$

は、正 N 角錐型 flux data

j	$1, \dots, N$	$N + 1$
q_j	$p\zeta_N^{j-1}$	∞
$g(q_j)$	$p\zeta_N^{j-1}$	∞
$w(q_j)$	a	a'

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 1)$ -noid を実現する。($\zeta_N := e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ とする。) この g_{pyr} は $g_{\text{N\&M}}|_{M=1} = z^{N-1} + z^{-1}$ と同値なので、
 $\text{Ind}(g_{\text{pyr}}) = 2d - 2 = 2N - 2$, $\text{Nul}(g_{\text{pyr}}) = 5$ が成り立つ。

11.2 4-noid の index と nullity

種数 0 で、 g の次数が $d := \deg g \leq 2$ の場合、
 $\text{Ind}(g) = 2d - 1$, $\text{Nul}(g) = 3$ と完全に決定されているので、ここでは、まず $d = 3$ の場合、すなわち 4-noid から考えたい。この場合、flat-ended な極小はめ込みは分岐点を持ちえず、Bryant による分類の中の記述から次の事実が読み取れる。

補題 11.2. $d = 3$ の場合、 g' の零点の非調和比が ζ_6 または $\overline{\zeta_6}$ のとき、かつそのときに限り、 g は flat-ended な 4-noid の Gauss 写像として実現される。

この条件を満たすための判別式を用いて、次の判定条件を得る。

補題 11.3. (判定条件 2) 3 次の有理関数

$g(z) = \sum_{j=0}^3 \alpha_j z^j / \sum_{j=0}^3 \beta_j z^j$ に対し、

$D_{\text{tet}} := 3\alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - 3\alpha_0\beta_3$ とおく。 $D_{\text{tet}} = 0$ ならば、

$\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 4$, $\text{Nul}(g) = 5$ が、 $D_{\text{tet}} \neq 0$ ならば、

$\text{Ind}(g) = 2d - 1 = 5$, $\text{Nul}(g) = 3$ が成り立つ。

判定条件 2 の利点は、同値性を示すために、具体的に二つの Möbius 変換を見つけなくてもよいということにある。この判定条件を用いて、次の結果が得られた。

補題 11.4. (判定条件 3) limit normal が 2 次元を張る 4-noid で、指定された flux を実現するような 4 個の end の配置が、その非調和比に関する 4 次方程式の 4 重解として与えられるとき、 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 4$, $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

実は曲面の例 1 もまた、その end の配置は、それらの非調和比に関する方程式の重解として与えられる。しかしながら、limit normal が 2 次元を張る 4-noid では、一般に end の配置は常に重解として与えられるものの、非自明な nullity を持つとは限らない。

最後に、条件 $D_{\text{tet}} = 0$ の相対 weight を用いた記述を紹介しておく。

定理 **11.5.** (判定条件 4) 4-noid が、 $\text{Ind}(X) = 4$, $\text{Nul}(X) = 5$ を満たすためには、その相対 weight と非調和比が次の条件を満たすことが必要十分である。

$$(w_{12} + w_{34}) + (w_{13} + w_{24})q_{1324}^2 + (w_{14} + w_{23})q_{1423}^2 = 0$$

この条件を満たすためには、相対 weight が次の条件を満たせば十分である。

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\sigma(1)\sigma(2)}w_{\sigma(3)\sigma(4)} \neq w_{\sigma(1)\sigma(3)}w_{\sigma(2)\sigma(4)} \quad (\forall \sigma \in S_4), \\ (w_{12} + w_{34})(w_{13}w_{24} - w_{14}w_{23})^2 + (w_{13} + w_{24})(w_{14}w_{23} - w_{12}w_{34})^2 \\ \quad + (w_{14} + w_{23})(w_{12}w_{34} - w_{13}w_{24})^2 = 0 \end{array} \right.$$

11.3 \mathbb{Z}_N -不変な n -noid の index と nullity

4 次以上の有理関数について、同様の判定条件を一般に求めるのは難しい。その理由の一つは、分岐点を持つ flat-ended な極小はめ込みも考慮しなければならないことにある。ここでは、 \mathbb{Z}_N -不変な場合限定して得た結果を紹介したい。

例**11.3.** (Gauss 写像の例 2) $N, L \in \mathbf{N}, L \leq N - 1,$
 $s \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対し、

$$g_s(z) := \frac{sz^N + 1}{z^L(z^N - s)}$$

とおく。

$$S_{N,L}(m) := \frac{2NL}{m^2 - (N - 2)m + (N - L - 1)(L - 1)} - 1$$

とすると、次が成り立つ。

$$\text{Nul}(g_s) = \begin{cases} 5 & s^2 = S_{N,L}(N - 1) = (N + L)/(N - L) > 0 \\ 7 & s^2 \in \{S_{N,L}(m) \mid m \in \mathbf{Z}, (N - 1)/2 \leq m \leq N - 2, \\ & m \neq L - 1, N - L - 1\} \\ 5 & s^2 = S_{N,L}((N - 2)/2) = -(N + 2L)^2/(N - 2L)^2 < 0 \\ 3 & \text{上記以外でかつ} \\ & s^2 \notin \{-1, -(N + L)^2/(N - L)^2\} \text{ のとき} \end{cases}$$

例**11.4.** (Gauss 写像の例 2.1) $N \geq 2$ かつ

$s^2 = S_{N,L}(N-1) = (N+L)/(N-L) > 0$ のとき、

$\text{Ind}(g_s) = 2d - 2 = 2(N+L) - 2$, $\text{Nul}(g_s) = 5$ が成り立つ。

一般に、 $N, L \in \mathbf{N}$, $L \leq N - 1$, $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,
 $s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0$ に対し、 $N + L$ 次の有理関数

$$g(z) := \frac{s_{11}z^N + s_{12}}{z^L(s_{21}z^N + s_{22})}$$

は、 $s := (-s_{11}s_{22}/s_{12}s_{21})^{1/2}$ に対し g_s と同値である。

g_s と同値な g を実現する n -noid として、次の例がある。

例 **11.5.** (曲面の例 2) $N \in \mathbf{N}, N \geq 2, a, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, に対し、Weierstrass data

$$g(z) = -\frac{1}{tf(z)}, \quad \eta = -taf(z)^2 dz,$$

$$\text{但し } f(z) = \frac{(N+1)z^N + (N-1)}{z(z^N - 1)}$$

は、平行な flux data

j	$1, \dots, N$	$N+1$	$N+2$
q_j	ζ_N^{j-1}	0	∞
$g(q_j)$	0	0	∞
$w(q_j)$	a	$-a(N-1)/2$	$a(N+1)/2$

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 2)$ -noid を実現する。この g は、
 $s = \sqrt{(N + L)/(N - L)}$, $(N, L) = (N, 1)$ に対応する g_s と同値
であるので、 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 2(N + 1) - 2 = 2(N + 2) - 4$,
 $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例**11.6.** (曲面の例 3) $N, M \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, $1 \leq M \leq N - 1$,
 $(N, M) = 1$, $q, p, a, s, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 但し

$$p = \rho(q) + \sqrt{\rho(q)^2 + 1} > 0, \quad \text{但し} \quad \rho(q) = \frac{N}{N - M} \cdot \frac{q^{2N-M} - q^M}{q^{2N} + 1},$$

$$s = \frac{pq^{2N-M} - 1}{q^{N-M}(p + q^M)},$$

$$t = \frac{aN(p^2 - 1)(q^{2N} + 1)(p + q^M)^2}{(p^2 + 1)q^{2M}(p^2q^{2N-2M} - 1)} \quad (p^2q^{2N-2M} - 1 \neq 0 \text{ のとき})$$

$$a = 0 \quad (p^2q^{2N-2M} - 1 = 0, q \neq \pm 1 \text{ のとき})$$

に対し、Weierstrass data

$$g(z) = \frac{sz^N + 1}{z^{N-M}(z^N - s)}, \quad \eta = -t \frac{z^{2N-M-1}(z^N - s)^2}{(z^N - q^N)^2(z^N + q^{-N})^2} dz$$

は、正 N 角反柱型 flux data

j	$1, \dots, N$	$N + 1, \dots, 2N$
q_j	$q\zeta_N^{M(j-1)}$	$q^{-1}\zeta_{2N}^{M(2j-1)}$
$g(q_j)$	$p\zeta_N^{M(j-1)}$	$p^{-1}\zeta_{2N}^{M(2j-1)}$
$w(q_j)$	a	a

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $2N$ -noid を実現する。この $2N$ -noid は、 $M = 1$ かつ $q \neq -1$ のとき分岐点を持たず、そして、 q が方程式 $\rho(q) = (p^2 - 1)/(2p)$ の重解、すなわち flux vector の動きが一瞬止まる ($\partial p/\partial q = 0$) とき、 $s^2 = S_{N, N-M} = (2N - M)/M$ となり、 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 2(2N - M) - 2$, $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例**11.7.** (曲面の例 3.1) $N = 2, M = 1, q = p = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$ のとき、四面体群不変な 4-noid で、 $s^2 = 3 = S_{2,1}$ より、 $\text{Ind}(g) = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例**11.8.** (曲面の例 3.2) $N = 3, M = 1, q = p = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$ のとき、八面体群不変な 6-noid で、 $s^2 = 25/2 \neq 5 = S_{3,2}$ より、 $\text{Ind}(g) = 2 \cdot 6 - 3 = 9, \text{Nul}(g) = 3$ が成り立つ。

すなわち、正多面体の対称性は、非自明な nullity とは必ずしも結びつかない。

11.4 nullity と flux 写像

ここまでで見て来た重解であることの意味は、実は n -noid の空間を flux により parametrize したときの、分岐点であることに対応するように思われる。そこで最後に、nullity と flux 写像の関係について見ておきたい。

\mathcal{M} を任意種数の n -noid の空間とし、flux 写像

$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbf{S}^2)^n \times \mathbf{R}^n \text{ を}$$

$$\mathcal{F}(X) := (G(q_1), \dots, G(q_n), w(q_1), \dots, w(q_n)) \text{ により定義する。}$$

$\mathbf{C} \supset U$ は開集合、 $\mathbf{R} \supset I$ は開区間、 $q(t)$ ($t \in I$) は U 内の滑らかな曲線とし、共形極小はめ込みの 1-parameter 族 $X : (U \times I) \setminus \{(q(t), t) \mid t \in I\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対し、 $X(\cdot, t)$ の Weierstrass data を (g, η) で表す。 $X(\cdot, t)$ が $q(t)$ で catenoid 型または平面型の end を持つとすると、その Taylor または Laurent 級数展開は次の形で与えられる。

$$g = p + \gamma(z - q) + (z - q)^2 g_2(z),$$

$$\eta = \left\{ \frac{B}{(z - q)^2} + \frac{b}{z - q} + f_0(z) \right\} dz$$

ここで、 p, γ, B 及び b は、いずれも $t \in I$ のみによる滑らかな関数である。

$(G(q), w(q)) = (v, a)$ を $X(\cdot, t)$ の flux data とするとき、次が成り立つ。

$$\langle \Phi_t, G \rangle = \frac{|p|^2 + 1}{|g|^2 + 1} \left\{ \frac{2p_t B}{z - q} - 2a_t \log(z - q) \right\} + O(1)$$

これから、 $p_t = 0$ かつ $a_t = 0$ ならば、Jacobi 関数 $\langle X_t, G \rangle = \operatorname{Re} \langle \Phi_t, G \rangle$ は q の近くで有界であるとわかる。よって、次を得る。

定理 11.6. (判定条件 5) flux 写像の臨界点の nullity は 3 より大きい。

参考文献

Ejiri-Kotani: Index and flat ends of minimal surfaces, Tokyo J. Math. 16(1993), 37-48.

Montiel-Ros: Schrödinger operators associated to a holomorphic map; in Global Differential Geometry and Global Analysis (Berlin, 1990), Lecture Notes in Math. 1481, Springer, Berlin, 1991, 147-174.

Nayatani: Morse index of complete minimal surfaces; in The Problem of Plateau, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, 181-189.

Nayatani: Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space, Comment. Math. Helv. 68(1993), 511-537.

12 catenoid 型の end を持つ向き付け不可能な極小曲面

12.1 序

本節の内容は、濱田航平氏（大阪市立大学・大阪府立茨木高校）との共同研究に基づくものである。

M を向き付け不可能な曲面、 $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ をはめ込みとする。向き付け可能な曲面の場合同様に、この M にも X による誘導計量が定義され、任意の有界閉部分領域上でのこの計量に関する面積汎関数の臨界点として、共形極小はめ込みも定義される。向き付け不可能な極小曲面としては、Henneberg 曲面が古典的に有名であるが、完備なものとしては、全曲率 $TC(X)$ が -8π より大きい（つまり $TC(X) \geq -6\pi$ の）完備共形極小はめ込みを、向き付け可能と不可能とを問わず分類した Meeks の論文において構成された完備極小な Möbius の帯であり、その写像としての定義域は $M = \mathbf{R}P^2 \setminus \{1\text{点}\}$ で、 $TC(X) = -6\pi$ であった。Meeks は同じ論文の中で、 $TC(X) \geq -6\pi$ を満たす向き付け不可能な例は他には存在しないことも同時に示している。

一般に、全曲率有限な完備共形極小はめ込みは、compact な曲面 \overline{M} から有限個の点を除いたものをその定義域としてとれる。この除かれた点、或いはその近傍の像を、いずれも end と呼ぶ。Meeks の仕事に引き続き、Oliveira, Barros, Ishihara によって、 $\overline{M} = \mathbf{R}P^2$ で end が 1, 2, 3 個の場合についての研究が、相次いで発表された。また、種数の高い場合については、Lopez が $\overline{M} = \text{Klein の壺}$ で end 1 個、 $TC(X) = -8\pi$ である例を構成し、その後、向き付け不可能な極小曲面の研究は、もっぱら種数が大きく、end の個数が少ない（できれば 1 個が望ましい）場合が主流となって行く。

一方、今回お話したい例はと言うと、種数が小さく、endの個数が目一杯多い、すなわち上述の主流とは言わば対局を行く場合である。一般に、全曲率有限な完備共形極小はめ込みにおいては、その種数、endの個数と全曲率の間にChern-Ossermanの不等式と呼ばれる関係式が成り立つことが知られている。これを $\bar{M} = \mathbf{R}P^2$ でendが n 個の場合に適用してみると $TC(X) \leq -2(2n - 1)\pi$ となる。言い換えれば、 $TC(X) = -2d\pi$ ならばendの個数は $n \leq (d + 1)/2$ を満たすと言うことになる。従って、上で述べた「目一杯多い」とは $n = (d + 1)/2$ を意味することになる。

一般に Chern-Ossermann の不等式において等号を満たす極小はめ込みを n -noid と呼ぶ。ここで等号が成立することと、各 end が埋め込みとなっていることは同値である。全曲率有限の仮定の下では、埋め込まれた end は catenoid (の半分) または平面のいずれかに漸近する挙動を示す。Meeks の分類の示すことの一つは、 $TC(X) = -6\pi$ を満たす end が 2 個の例は存在しない、すなわち $\bar{M} = \mathbf{R}P^2$ で end が $n = (3 + 1)/2 = 2$ 個の 2-noid (catenoid ?) は存在しないということである。さらに 5 以上の奇数 d についても、Oliveira が $d = 5, 7$ で end の一つだけ平面型である例を、Barros が $d = 5$ で end の一つだけ catenoid 型である例の 1-parameter 族をそれぞれ構成している

(Barros の論文のこの部分における記述には混乱が見られるが、修復は可能であると思われる) が、それらのどの例においても残る end が埋め込まれた end ではなく、Oliveira, Barros, Ishihara の論文中には、上の等号を満たす例は一つも見出されない。特に Ishihara は end が平行な場合の存在への障害となる条件も与えている。

この等号を満たす恐らく最初の例は、これらの流れとは別に、向き付け不可能な compact Willmore はめ込みを扱った Kusner の論文において構成された。それらの例は $\overline{M} = \mathbf{R}P^2$ で 3 以上の奇数個の平面型 end を持つものであった。そこで、次の問題を考えるのは、極めて自然なことと思われる。

- ・ 偶数個の埋め込まれた end を持つものは存在するか？
- ・ 全ての end が catenoid 型であるものは存在するか？

今回は、この問題に対する解答として、次のような結果が得られた。

定理 **12.1.** (1) 任意の奇数 $N \geq 3$ に対し、 N 個の catenoid 型 end と 1 個の平面型 end を持つ $(N + 1)$ -noid が存在する。

(2) 任意の奇数 $N \geq 3$ に対し、 $N + 1$ 個の catenoid 型 end を持つ $(N + 1)$ -noid の 1-parameter 族が存在する。特にこの族は (1) の $(N + 1)$ -noid と、(平面の分離による end 1 個の退化を許して) 上記の Kusner による flat-ended な N -noid とを結ぶ変形族となっている。

以下では、前提となる基本的な事実と、証明の方針を述べたい。

12.2 向き付け不可能な極小曲面

全曲率有限な完備共形極小はめ込みに関する多くの研究同様、ここでも Enneper-Weierstrass の表現公式を用いる。向き付け不可能な完備共形極小はめ込み $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ に表現公式を適用する際は、通常 2 重被覆 $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ をとり、向き付け可能な Riemann 面 \widetilde{M} からの完備共形極小はめ込み $\widetilde{X} := X \circ \pi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ に持ち上げて記述する。表現公式は、次の形のものを使用する。

$$\widetilde{X}(z) = \operatorname{Re} \int^z t(1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\eta$$

\widetilde{M} 上の任意の有理型関数 g と任意の有理型 1-形式 η で、 η と $g^2\eta$ が共に \widetilde{M} 上で正則であるようなものに対し、 \widetilde{X} が \widetilde{M} 上 well-defined であるための必要十分条件は、 \widetilde{M} 内の任意の閉曲線 C に対し、

$$(12.1) \quad \operatorname{Re} \int_C {}^t(1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\eta = 0$$

が成り立つことである。また \widetilde{X} が分岐点を持たない(すなわち誘導計量が退化しない)ための必要十分条件は η と $g^2\eta$ が共通零点を持たないことである。 (g, η) を \widetilde{X} の Weierstrass data と呼ぶ。

ここでは $\overline{M} = \mathbf{R}P^2$ の場合を考えているので、 $\widetilde{M} = \mathbf{S}^2$ であり、 $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ なる同一視の下、 \widetilde{X} の定義域は、 $\widetilde{M} = \hat{\mathbf{C}} \setminus \{q_1, \dots, q_{2n}\}$ の形にとれる。このとき、条件 (12.1) は留数に関する次の条件に書き換えられる。

(12.2)

$$\overline{R_0(q_j)} + R_2(q_j) = 0, \quad \overline{R_1(q_j)} = R_1(q_j) \quad (j = 1, \dots, 2n)$$

但し、 $R_i(q_j) := \text{Res}_{z=q_j} g^i \eta$ ($i = 0, 1, 2$; $j = 1, \dots, 2n$) とする。

今、 π の被覆変換を $I: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ とすると、これは $\pi \circ I = \pi$, $\partial I = 0$, $I^2 = id_{\widetilde{M}}$ を満たし、さらに $\widetilde{M} = \widehat{C}$ 上の反正則対合 $I(z) = -1/\bar{z}$ へと自然に拡張される。Meeks は、 \widetilde{X} が向き付け不可能なある X の持ち上げであるための必要十分条件が (g, η) を用いて次のように表せることを示した。

$$(12.3) \quad g \circ I = -\frac{1}{\bar{g}}, \quad I^* \eta = -\overline{g^2 \eta}$$

このとき、 $\text{end} \{q_1, \dots, q_{2n}\}$ は、添え字を適当に入れ替えると、 $\{q_1, \dots, q_n, I(q_1), \dots, I(q_n)\}$ と表される。

12.3 n -noid

$X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ は向き付け不可能な n -noid とする。このとき、その向き付け可能な持ち上げ $\widetilde{X} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ は言うまでもなく向き付け可能な $2n$ -noid である。一般に、種数 0 の $2n$ -noid $\widetilde{X} : \widetilde{M} = \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{q_1, \dots, q_{2n}\}$ の Weierstrass data は、 $q_j \neq \infty$, $p_j = g(q_j) \neq \infty$ ($j = 1, \dots, 2n - 1$), $q_{2n} = \infty$, $p_{2n} = g(q_{2n}) = \infty$ を仮定するとき、次の形で与えられる。

$$g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \eta = -Q(z)^2 dz$$

但し

$$P(z) = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{p_j b_j}{z - q_j} - b_{2n}, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{b_j}{z - q_j}$$

である。ここで、 \widetilde{X} が well-defined であるための条件 (12.1) 或いは (12.2) は次のように書き換えられる。

$$(12.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_j := b_j \left(\sum_{k=1; k \neq j}^{2n-1} b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j} + b_{2n} \right) \in \mathbf{R} \\ w_j^* := b_j \left(\sum_{k=1; k \neq j}^{2n-1} b_k \frac{\overline{p_j p_k} + 1}{q_k - q_j} + b_{2n} \overline{p_j} \right) = 0 \\ w_{2n} := b_{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} b_k \in \mathbf{R} \\ w_{2n}^* := b_{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} b_k (-p_k) = 0 \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, 2n - 1)$$

各 w_j は $\text{end } q_j$ の weight すなわち漸近 catenoid の標準 catenoid との向きも込めた相似比を表す量であり、 $w_j \neq 0$ のとき catenoid 型、 $w_j = 0$ のとき平面型ということになる。

一方、 \widetilde{X} が向き付け不可能なある n -noid X の持ち上げであるための条件 (12.3) は

$$(12.5) \quad \overline{zP(z)} = \pm\sqrt{-1}Q \circ I(z)$$

となる。今、添え字の順番について、 $q_{n-1+j} = I(q_j)$ ($j = 1, \dots, n-1$), $q_{2n-1} = 0 = I(\infty) = I(q_{2n})$ を仮定すると、条件 (12.5) は、Weierstrass data の係数を用いて、さらに次のように書き換えられる。

$$(12.6) \quad \overline{p_j b_j} = \pm\sqrt{-1}q_j b_{n-1+j} \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad \overline{b_{2n-1}} = \pm\sqrt{-1}b_{2n}$$

この条件を (12.4) に代入して、自動的に同値となる式を省くと、次を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l}
w_j = b_j \left\{ \sum_{k=1; k \neq j}^{n-1} b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j} + b_{2n-1} \frac{p_j}{q_j} \mp \sqrt{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k \frac{\bar{p}_k p_j + 1}{\bar{q}_k q_j + 1} + \bar{b}_{2n-1} \right) \right\} \in \mathbf{R} \\
w_j^* = b_j \left\{ \sum_{k=1; k \neq j}^{n-1} b_k \frac{\bar{p}_j p_k + 1}{q_k - q_j} - b_{2n-1} \frac{1}{q_j} \mp \sqrt{-1} \left(\sum_{k=1; k \neq j}^{n-1} \bar{b}_k \frac{\bar{p}_j - \bar{p}_k}{\bar{q}_k q_j + 1} + \bar{b}_{2n-1} \bar{p}_j \right) \right\} = 0 \\
\hspace{25em} (j = 1, \dots, n-1) \\
w_{2n-1} = b_{2n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{p_k}{q_k} \mp \sqrt{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k + \bar{b}_{2n-1} \right) \right\} \in \mathbf{R} \\
w_{2n-1}^* = b_{2n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{1}{q_k} \mp \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k (-\bar{p}_k) \right\} = 0
\end{array} \right.$$

12.4 \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 1)$ -noid

これで、向き付け不可能な一般の n -noid を与える方程式は得られた訳であるが、全く何の条件も追加することなく、これを具体的に解くことは恐らく不可能である。そこで、ここでは、 $SO(3)$ の部分群である巡回群 \mathbf{Z}_N の作用で不変な $(N + 1)$ -noid に限定して考える。若干の議論により、Weierstrass data の係数と weight について次を仮定しても一般性を失わないことがわかる。

j	$1, \dots, N$	$N + 1, \dots, 2N$	$2N + 1$	$2N + 2$
q_j	$q\zeta_N^{j-1}$	$-q^{-1}\zeta_N^{j-1}$	0	∞
p_j	$p\zeta_N^{j-1}$	$-p^{-1}\zeta_N^{j-1}$	0	∞
b_j	b	\tilde{b}	b_0	b_∞
w_j	a	$-a$	a_0	$-a_0$

但し、 $q, p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, \tilde{b} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $b_0, b_\infty \in \mathbf{C}$, $a, a_0 \in \mathbf{R}$,
 $\zeta_N := e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ とする。 N が偶数のときは、end 同士が被らないように、 $q^2 \neq 1$ も仮定する。end の個数が減らないように、 $b_0, b_\infty \neq 0$ も必要な仮定であるが、特別な場合として、 $b_0 = b_\infty = 0$ は許容するものとする。この設定の下では、条件 (12.6) は

$$(12.7) \quad p\bar{b} = \pm\sqrt{-1}q\tilde{b}, \quad \bar{b}_0 = \pm\sqrt{-1}b_\infty$$

となる。任意の解に対し、flux 公式もしくは留数定理から $a_0 = \{N(p^2 - 1)/(p^2 + 1)\}a$ は自動的に成り立つ。

以上の条件を全部放り込んでやると、 $(g, \eta) = (P/Q, -Q^2 dz)$ は、

$$P(z) = \frac{Npq^{N-1}b}{z^N - q^N} + \frac{(-1)^N Np^{-1}q^{1-N}\tilde{b}}{z^N - (-1)^N q^{-N}} - b_\infty,$$
$$Q(z) = \frac{Nbz^{N-1}}{z^N - q^N} + \frac{N\tilde{b}z^{N-1}}{z^N - (-1)^N q^{-N}} + \frac{b_0}{z}$$

で与えられる。

ここで、

$$w_j = w_1, \quad \zeta_N^{j-1} w_j^* = w_1^* \quad (j = 1, \dots, N)$$

$$w_{j'} = -\overline{w_1}, \quad \zeta_N^{j'-1} w_{j'}^* = -\overline{w_1^*} \quad (j' = N + 1, \dots, 2N)$$

$$w_{2N+1} = -\overline{w_{2N+2}}, \quad w_{2N+1}^* = w_{2N+2}^* = 0$$

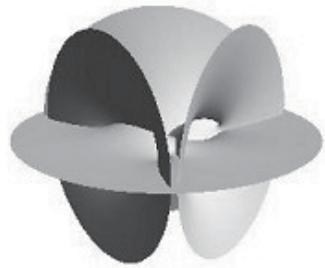
となり、問題は、 $w_1 \in \mathbf{R}$, $w_{2N+1} \in \mathbf{R}$, $w_1^* = 0$ の 3 式を同時に満たす $q, p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, \tilde{b} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ の組を求めることに帰着する。実はここからが一番大変で、さらに非分岐条件の吟味も必要なのであるが、紙幅の関係で、その部分は省略する。

結論としては、式の本数と変数の個数から 1-parameter 族の解の存在が自然に期待されるところであるが、向き付け可能な場合に比べて、条件はやや厳しいように見え、実際には N の偶奇で状況は大きく異なる。奇数の場合には

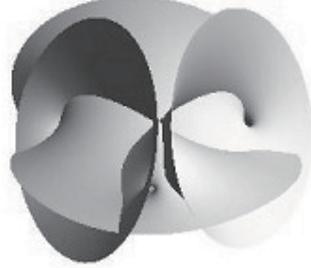
$$1 \leq q^2 \text{ (または } \frac{1}{q^2}) < \left(\frac{N + \sqrt{2N - 1}}{N - 1} \right)^{1/N}$$

の時かつその時に限り、例が存在し、定理 12.1 が得られた。ここで $q^2 = 1$ のとき $a_0 = 0$ となり定理 12.1 (1) に、 $q^2 = \{(N + \sqrt{2N - 1}) / (N - 1)\}^{1/N}$ のとき $b_0 = 0$ となり end が 1 個少ない Kusner の例に、そして、その間の各 q^2 が定理 12.1 (2) に、それぞれ対応している。

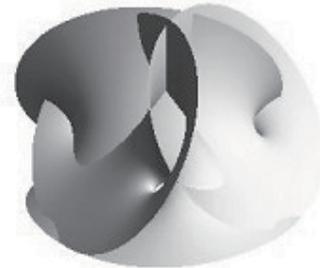
一方、偶数の場合には、そもそも \mathbb{Z}_N -不変なものは一切存在しない、すなわち、次の結果が得られた。



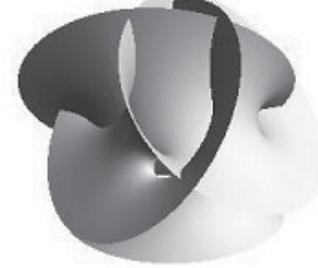
$q = 1$



$q = 1.1$



$q = 1.2$



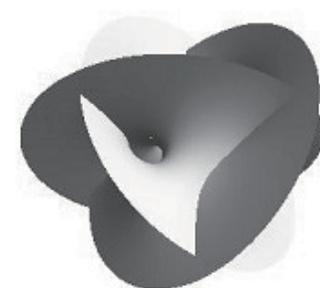
$q = 1.3$



$q = 1.37$



$q = 1.378$



$q = 1.37824\dots$

図 12.1 : 向き付け不可能な 4-end catenoid の変形

定理 12.2. 任意の偶数 N に対し、 $\overline{M} = \mathbf{R}P^2$ で \mathbf{Z}_N -不変な N -noid 及び $(N + 1)$ -noid は存在しない。

N が奇数の場合においても、上記の q^2 の上限が、 $N \rightarrow \infty$ とするとき限りなく 1 に近づく（つまり \mathbf{Z}_N -不変な例は極めて狭い範囲でしか存在しない）ことは興味深い。今回は \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 1)$ -noid（もしくは N -noid）に限定して考えたが、対称性の仮定を外した時、向き付け不可能な n -noid の存在には、向き付け可能な場合とは異なる制約条件があるか否かを明らかにすることが、今後の課題である。

とりあえず、基本的な所として、次の可能性はどうなっているのでしょうか？

- ・ 奇数個の catenoid 型 end のみを持つ（非対称な）もの。
- ・ 偶数個の平面型 end のみを持つ（非対称な）もの。

12.5 相対 weight

種数 0 の n -noid については一般に相対 weight が定義され、崩壊もしくは退化の様子、分岐点の個数、index と nullity (end が 4 個の場合) などがわかった。そこで、向き付け不可能な n -noid X の持ち上げである $2n$ -noid \widetilde{X} の相対 weight

$$w_{jk} := b_j b_k \frac{p_k - p_j}{q_k - q_j} \quad (j, k = 1, \dots, 2n; j \neq k)$$

について見ておくことにも意味があると思われる。 $I(q_j) = q_j$ により、添え字の対応を表すことにすると、持ち上げとなる \widetilde{X} の相対 weight が次を満たすことが、条件 (12.7) 等を用いて確かめられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{j\bar{k}} = -\overline{w_{jk}} \quad (j, k = 1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n}; j \neq k, \bar{k}) \\ w_{j\bar{j}} \in \sqrt{-1}\mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (j = 1, \dots, n) \\ \frac{w_{j\bar{j}}}{w_{k\bar{k}}} \in \mathbf{R}_+ \quad (j, k = 1, \dots, n) \\ |w_{jk}|^2, -w_{j\bar{j}}w_{k\bar{k}}, |w_{j\bar{k}}|^2: \text{狭義単調または全て一致} \\ \quad (j, k = 1, \dots, n; j \neq k) \end{array} \right.$$

また、上で「全て一致」することがなければ、逆も成り立つ
 (=持ち上げになっている)。

参考文献

Kusner: Conformal geometry and complete minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. **17**, 291-295 (1987).

Meeks: The classification of complete minimal surfaces in \mathbf{R}^3 with total curvature greater than -8π , Duke Math. J. **48**, 523-535 (1981).

13 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の平均曲率 0 曲面

13.1 空間的極大曲面

F は 3 次元 Lorentz 空間 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的曲面、すなわち接平面が空間的、法方向が時間的であるような曲面とする。 F 上の任意の点 P に対し、§2 の \mathbf{R}^3 内の曲面同様に主曲率、平均曲率 H 、**Gauss** 曲率 K が定義される。

$H \equiv 0$ であるような空間的曲面を、(空間的)極大曲面と呼ぶ。極大曲面は局所的には、次式が定める共形はめ込みの像として表される。

$$(13.1) \quad X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 + g^2, \sqrt{-1}(1 - g^2), -2g)\eta$$

ただしここで、 D は \mathbf{C} 内の単連結領域とし、 g は D 上の有理型関数、 η は D 上の正則 1 次微分形式とする。

この公式を **Enneper-Weierstrass** 型の表現公式と呼ぶ (cf. O. Kobayashi: Tokyo J. Math. 6(1983)297-309)。以下 §2 同様に、記述の簡略化のため

$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (1+g^2, \sqrt{-1}(1-g^2), -2g)\eta, \quad X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi$
と表す。

g を立体射影 σ で引き戻した $G = \sigma^{-1} \circ g$ は、ここでも単位法ベクトル場を与えているが、この σ は球面 S^2 からではなく、 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の二葉双曲面 $\mathbf{H}^2 := \mathbf{H}_+^2 \cup \mathbf{H}_-^2$ の北極 ${}^t(0, 0, 1)$ からの立体射影である。これも **Gauss** 写像と呼ぶ。

曲面 $X(D)$ の Riemann 計量は $(1 - |g|^2)^2 |\eta|^2$ で与えられる。

M を Riemann 面とする。 g は M 上の有理型関数、 η は M 上の正則 1 次微分形式とするとき、 M 内の任意の閉曲線 C に対し、

$$\operatorname{Re} \int_C \Phi = 0$$

すなわち

$$\overline{\int_C \eta} = - \int_C g^2 \eta, \quad \overline{\int_C g \eta} = - \int_C g \eta$$

が成り立つならば、(13.1) 式が M 上で定義された、共形極大はめ込みを与える。

ただし $|g| = 1$ の点では Riemann 計量が退化している。そのような点では法方向は光的になっており、曲面は空間的とは言えないが、それを特異点として許容し、曲面の一部と考えたい。

compact Riemann 面 \bar{M} から、有限個の点 q_1, \dots, q_n を除いたものを $M = \bar{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ とし、 g を \bar{M} 上の有理型関数、 η を \bar{M} 上の有理型 1 次微分形式で Φ が M 上正則となるようなものをとれば、 X は (特異点集合を持つ) 共形極大はめ込みとなる。ただし、後で注意するように、その像は必ずしも完備とは限らない。各 q_j の近傍の像を **end q_j** と呼び、 $G(q_j) = \sigma^{-1} \circ g(q_j)$ を end q_j における **limit normal** と呼ぶ。

すぐ後で紹介する第 1 種の catenoid と第 2 種の helicoid は、その典型例である。これら基本的な例の内に既に、generic な特異点としての cusp 辺以外の、特別ではあるがしばしば登場する錘状特異点、折り目特異点が観察される (cf. O. Kobayashi: J. Math. Soc. Japan 36(1984)609-617)。

\overline{M} 内の、特異点集合を横切らないような任意の閉曲線 C に対し、 $X(C)$ に沿う単位余法ベクトル場を n とする。

$$F(C) = \int_C n(s) ds$$

を C に関する **flux vector** と呼ぶ。 $F(C)$ が C の homology 類だけで決まり、また曲面の平行移動にはよらないことも、 \mathbf{R}^3 内の極小曲面同様である。

$\text{end } q_j$ が特異点でないとき、その周りを正の向きに一周する閉曲線 δ_j に対し、 $X(\delta_j)$ に沿う外向き（ \overline{M} 内では内向き）単位余法ベクトル場を n としたときの

$$F_j = F(\delta_j) = \int_{\delta_j} n(s) ds$$

を $\text{end } q_j$ の flux vector と言う。 F_j は δ_j の取り方によらない。

特異点集合 $\{|g| = 1\}$ 上では n は発散してしまうので、end q_j が特異点のときは、その flux vector は少なくともそのままでは定義できず、広義積分の収束について吟味が必要に見えるが、flux vector は実は

$$F_j = -\text{Im} \int_{\delta_j} \Phi = -2\pi \text{Re} \text{Res}_{z=q_j} \Phi$$

で与えられ、従って留数計算で求められることに着目すれば、そのような面倒は回避される。

end q_j が特異点でない、すなわち limit normal が時間的であるような埋め込まれた end については、その漸近挙動は \mathbf{R}^3 内の極小曲面の場合と酷似しており、平面型の end の flux vector は 0 であり、また、catenoid 型の end の flux vector は、limit normal に平行となる。

例13.1. $g = 0, \eta = dz, z_0 = 0$ で定義される空間的極大曲面は

$$X(z) = (x, -y, 0)$$

((計算))

$$\begin{aligned} & \int_0^z (1 + 0^2, \sqrt{-1}(1 - 0^2), -2 \cdot 0) dz \\ &= \int_0^z (1, \sqrt{-1}, 0) dz = [z, \sqrt{-1}z, 0]_0^z \\ &= (z, \sqrt{-1}z, 0) = (x + \sqrt{-1}y, -y + \sqrt{-1}x, 0) \end{aligned}$$

) であり、その像は x_1x_2 -平面である。以下、例 3.1 と全く同じ主張が続くだけなので省略する。

例13.2. $g = z^{-1}$, $\eta = dz$, $z_0 = ???$ で定義される空間的極大曲面は

$$X(z) = \left(x \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), -y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), -2 \log r \right)$$

((計算))

$$\begin{aligned} & \int^z (1 + z^{-2}, \sqrt{-1}(1 - z^{-2}), -2z^{-1}) dz \\ &= (z - z^{-1}, \sqrt{-1}(z + z^{-1}), -2 \log z) \\ &= \left(x + \sqrt{-1}y - \frac{1}{r^2}(x - \sqrt{-1}y), -y + \sqrt{-1}x + \frac{1}{r^2}(y + \sqrt{-1}x), \right. \\ & \quad \left. -2 \log r - 2\sqrt{-1}\theta \right) \\ &= \left(x \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \sqrt{-1}y \left(1 + \frac{1}{r^2} \right), -y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \sqrt{-1}x \left(1 + \frac{1}{r^2} \right), \right. \\ & \quad \left. -2 \log r - 2\sqrt{-1}\theta \right) \end{aligned}$$

) であり、その像は第 1 種の catenoid と呼ばれる回転面

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \left| \sinh \frac{x_3}{2} \right|$$

である。この場合も例 3.2 同様 $\overline{M} = \hat{C}$ で、 $q_1 = \infty$, $q_2 = 0$ である (順番はどちらでもよい)。

特異点集合 $|g| = 1$ は原点中心の単位円周 $|z| = 1$ であるが、その像は $\mathbf{R}^{2,1}$ の原点 (実は積分定数の取り方によるが) で 1 点につぶれているが、さらにその近傍を見ると、原点で傾き 1 の曲線 $x_1 = 2\sinh \frac{x_3}{2}$ の回転面になっていることから、その形状は錘状である。

さらに、この曲面は、この錘状特異点に関して点対称となっているが、実はこのような対称性は、錘状とは限らず特異点集合(の一部)が1点に退化しているとき常に成立し、§12 で扱った向き付け不可能な曲面の二重被覆となるための条件 (12.3) 同様に、反正則対合 $I(z) = 1/\bar{z}$ (“-” (マイナス) が無いことに要注意、不動点集合が単位円周) を用いて次のように表される。

$$g \circ I = \frac{1}{\bar{g}}, \quad I^* \eta = -\overline{g^2 \eta}$$

一方 flux vector についてであるが、 ∞ の周りを正の向きに一
 周する閉曲線とは、複素平面 \mathbb{C} 内の原点 0 の周りを負の向き
 に一周する閉曲線であり、この場合 n は外向き単位法ベクトル
 であるが、単位円周の像は 1 点につぶれて錘状特異点になって
 いるので、それより大きめの半径 $r > 1$ を固定して
 $R := r(1 - \frac{1}{r^2}) = -2\sinh\frac{x_3}{2} > 0$ とおき、 $X(\delta_1)$ の弧長パラメー
 ター表示を、

$$\left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, -2 \log r\right) \quad (0 \leq s \leq 2\pi R)$$

とすれば、

$$n(s) = \frac{2}{R} \left(\cosh \frac{x_3}{2} \cos \frac{s}{R}, \cosh \frac{x_3}{2} \sin \frac{s}{R}, -1 \right)$$

より、これを線積分して

$$F_1 = 4\pi(0, 0, -1)$$

を得る。

また、小さめの半径 $r < 1$ を固定して
 $R := -r(1 - \frac{1}{r^2}) = 2\sinh\frac{x_3}{2} > 0$ とおき、 $X(\delta_2)$ の弧長パラメータ表示を、

$$(R \cos \frac{s}{R}, -R \sin \frac{s}{R}, -2 \log r) \quad (0 \leq s \leq 2\pi R)$$

とすれば、

$$n(s) = \frac{2}{R}(\cosh\frac{x_3}{2} \cos \frac{s}{R}, -\cosh\frac{x_3}{2} \sin \frac{s}{R}, 1)$$

より、これを線積分して

$$F_2 = 4\pi(0, 0, 1)$$

を得る。

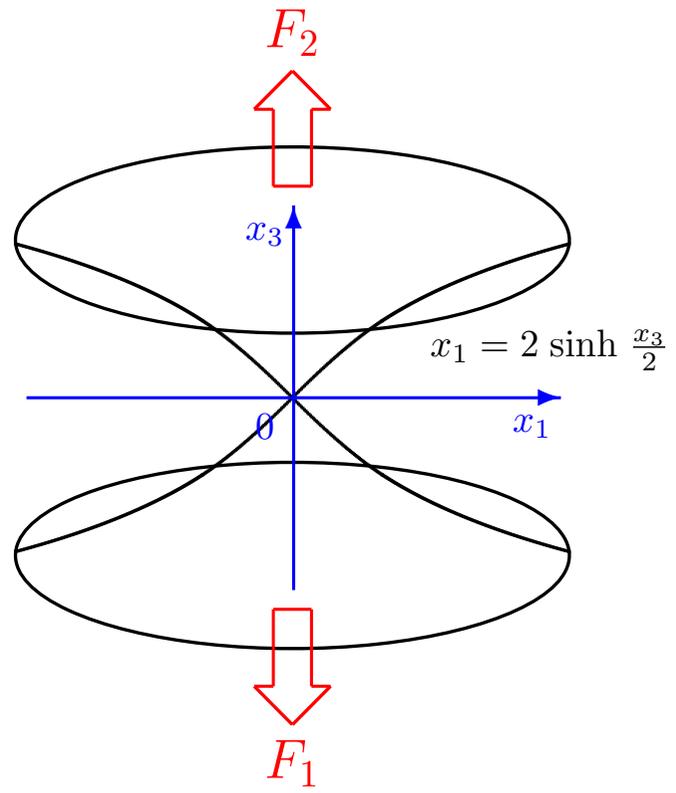
((公式の確認)

$$\int_{\delta_2} \Phi = 2\pi\sqrt{-1}(0, 0, -2) = (0, 0, -4\pi\sqrt{-1})$$

$$\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, 0, -4\pi)$$

$$-\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, 0, 4\pi)$$

)



一方、 $\text{end } q_j$ が特異点である、すなわち limit normal が光的であるような場合には、埋め込まれた end の対応物である simple end ($\eta, g\eta, g^2\eta$ の極の位数が2 以下かつその積分が周期を生じないもの) の漸近挙動はやや複雑で、「平面型」の end の flux vector は 0 であるが、catenoid 型の end の flux vector は、limit normal に平行(つまり光的)であるとは限らず、limit normal を含む光的平面上の任意の空間的 vector を取り得る。

例13.3. $g = z, \eta = \sqrt{-1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 dz, z_0 = ???$ で定義される空間的極大曲面は

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \left(-2y \left\{ \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right\}, \right. \\
 &\quad \left. \log \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}, \right. \\
 &\quad \left. -2y \left\{ \frac{-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right\} \right) \\
 &= \left(\frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2} (1 + e^{-x^2}), x_2, \frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2} (1 - e^{-x^2}) \right)
 \end{aligned}$$

((計算))

$$\eta = \sqrt{-1} \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right\} dz,$$

$$g\eta = \sqrt{-1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$= \sqrt{-1} \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right\} dz,$$

$$g^2\eta = \sqrt{-1} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right)^2 dz$$

$$= \sqrt{-1} \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right\} dz$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
& \int^z \left(\sqrt{-1} \left\{ \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z+1)^2} \right\}, - \left(\frac{-2}{z-1} + \frac{2}{z+1} \right), \right. \\
& \quad \left. \sqrt{-1} \left\{ \frac{-2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z+1)^2} \right\} \right) dz \\
& = \left(\sqrt{-1} \left(-\frac{2}{z-1} - \frac{2}{z+1} \right), -(-2 \log(z-1) + 2 \log(z+1)), \right. \\
& \quad \left. \sqrt{-1} \left(\frac{2}{z-1} - \frac{2}{z+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{-1} \left\{ -\frac{2(x-1) - 2\sqrt{-1}y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2(x+1) - 2\sqrt{-1}y}{(x+1)^2 + y^2} \right\}, \right. \\
&\quad \log\{(x-1)^2 + y^2\} + 2\sqrt{-1}\text{Tan}^{-1}\frac{y}{x-1} \\
&\quad \quad - \log\{(x+1)^2 + y^2\} - 2\sqrt{-1}\text{Tan}^{-1}\frac{y}{x+1}, \\
&\quad \left. \sqrt{-1} \left\{ \frac{2(x-1) - 2\sqrt{-1}y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2(x+1) - 2\sqrt{-1}y}{(x+1)^2 + y^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

) であり、その像は第2種の helicoid と呼ばれる線織面

$$\frac{x_3}{x_1} = \tanh \frac{x_2}{2}$$

である。この場合 $\overline{M} = \hat{C}$ で、 $q_1 = 1$, $q_2 = -1$ である (順番はどちらでもよい)。

特異点集合 $|g| = 1$ は原点中心の単位円周 $|z| = 1$ であるが、この単位円周について互いに対称な点の組は全て同じ点に写り、曲面の像は二枚重ねとなっており、特異点集合はその折り目である。

このように二枚重ねとなるための条件も、(12.3) 同様に、反正則対合 $I(z) = 1/\bar{z}$ (これも不動点集合が単位円周の場合) を用いて次のように表される。

$$g \circ I = \frac{1}{\bar{g}}, \quad I^* \eta = \overline{g^2 \eta}$$

一方 flux vector についてであるが、1 の周りを正の向きに一周する閉曲線 δ_1 として虚軸を上から下へ抜けるものをとるのが計算しやすい。その像

$$X(0, y) = \left(\frac{-4y}{1+y^2}, 0, 0 \right)$$

は x_1 軸上の閉区間 $[-2, 2]$ を一往復する。この場合 n は $(1, 0)$ を X_* で送ったもので、

$$X_x(0, y) = \frac{4}{(1+y^2)^2} \left(0, \frac{-4}{1+y^2}, \frac{8y}{(1+y^2)^2} \right)$$

から

$$n(y) = \frac{1}{|1-y^2|} \left(0, \frac{-4}{1+y^2}, \frac{8y}{(1+y^2)^2} \right)$$

より、

$$dx_1 = \frac{-4(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} dy$$

を線素として、これを線積分して

$$F_1 = 4\pi(0, -1, 0)$$

を得る。

また、 -1 の周りを正の向きに一周する閉曲線 δ_2 として虚軸を下から上へ抜けるものをとるのが計算しやすい。その像もちろん x_1 軸上の閉区間 $[-2, 2]$ を一往復する。この場合 n は $(-1, 0)$ を X_* で送ったもので、

$$n(y) = \frac{-1}{|1 - y^2|} \left(0, \frac{-4}{1 + y^2}, \frac{8y}{(1 + y^2)^2} \right)$$

より、これを線積分して

$$F_2 = 4\pi(0, 1, 0)$$

を得る。

((公式の確認))

$$\int_{\delta_2} \Phi = 2\pi\sqrt{-1}(0, -2, 0) = (0, -4\pi\sqrt{-1}, 0)$$

$$\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, -4\pi, 0)$$

$$-\text{Im} \int_{\delta_2} \Phi = (0, 4\pi, 0)$$

)

上記の5種類に加えて、空間的極大曲面においては、 \mathbf{R}^3 内の極小曲面では有り得なかった η , $g\eta$, $g^2\eta$ の極の位数が1で積分が周期を生じないものもあり、これを併せて simple end は6種類を数えることとなる。特に flux vector が0または光的な場合には、end は光的直線に漸近して完備にはならないので注意が必要である。実はそのような例が、次節以降で扱う型変化において重要な役割を果たすことになる。

なお、以上のことを踏まえた上で、空間的極大曲面についても極大 herisson (§4 の Rosenberg-Toubiana の仕事の対応物) や、flux 公式の逆問題の定式化、種数0の3-noidの完全な分類、generic な data に対する4-noidの一般的存在などが得られた。

13.2 時間的極小曲面

F は 3 次元 Lorentz (Minkowski) 空間 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の時間的曲面、すなわち接平面が時間的(と言うか時空的)、法方向が空間的であるような曲面とする。 F 上の任意の点 P に対し、§2 の \mathbf{R}^3 内の曲面と概ね同様に(空間方向を縦軸にとって $x_1 = f(x_2, x_3)$ と表し) 主曲率、平均曲率 H 、**Gauss** 曲率 K が定義される。

$H \equiv 0$ であるような時間的曲面を、時間的極小曲面と呼ぶ。 \mathbf{R}^3 内の極小曲面と $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面とある程度の共通点は有するものの、それらの類似性に比べると、性格はかなり異なるものと言える。以下、この講義に係る範囲で、留意すべき点を見ていきたい。

まず時間的極小曲面は、複素数の代わりに para 複素数

$$\check{C} := \{\check{z} = x + jy \mid x, y \in \mathbf{R}\}, \quad j^2 = 1$$

を用いると、局所的には、次式が定める共形はめ込みの像として表される。

$$(13.2) \quad \check{X}(\check{z}) = \operatorname{Re} \int_{\check{z}_0}^{\check{z}} (2\check{g}, j(1 - \check{g}^2), -(1 + \check{g}^2)) \check{\eta}$$

時間的曲面においては、方程式 $H \equiv 0$ は楕円型ではなく双曲型で、その解の解析性は一般には期待できないが、この講義では空間的曲面から型変化を許容しつつ解析的に延長される場合を主に扱いたいので、ここではそれを仮定し、 \check{D} は para 複素平面 \check{C} 内の単連結領域とし、 \check{g} は \check{D} 上の para 有理型関数、 $\check{\eta}$ は \check{D} 上の para 正則 1 次微分形式とする。

この公式を **Enneper-Weierstrass** 型の表現公式と呼ぶ (cf. H.Takahashi: Master thesis, Osaka University, 2012)。以下 §2 同様に、記述の簡略化のため

$$\check{\Phi} = (\check{\phi}_1, \check{\phi}_2, \check{\phi}_3) = (2\check{g}, j(1 - \check{g}^2), -(1 + \check{g}^2))\check{\eta}, \quad \check{X}(\check{z}) = \operatorname{Re} \int_{\check{z}_0}^{\check{z}} \check{\Phi}$$

と表す。

\check{g} を $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の一葉双曲面 (2次元 de-Sitter 空間) $\mathbf{S}^{1,1}$ の東極 ${}^t(1, 0, 0)$ からの立体射影 $\check{\sigma}$ で引き戻した $\check{G} = \check{\sigma}^{-1} \circ \check{g}$ は、単位法ベクトル場を与えており、これを **Gauss** 写像と呼ぶ。

曲面 $\check{X}(\check{D})$ の Lorentz 計量 (neutral 計量と呼ぶ方がふさわしいかも) は $(1 - |\check{g}|^2)^2 |\check{\eta}|^2$ で与えられる。

\check{M} を Lorentz 面とする。 \check{g} は \check{M} 上の para 有理型関数、 $\check{\eta}$ は \check{M} 上の para 正則 1 次微分形式とするとき、 \check{M} 内の任意の閉曲線 C に対し、

$$\operatorname{Re} \int_C \check{\Phi} = 0$$

すなわち

$$\overline{\int_C \check{\eta}} = - \int_C \check{g}^2 \check{\eta}, \quad \overline{\int_C \check{g} \check{\eta}} = - \int_C \check{g} \check{\eta}$$

が成り立つならば、(13.2) 式が \check{M} 上で定義された、共形極小はめ込みを与える。

ただし $|\check{g}| = 1$ の点では Lorentz (neutral) 計量が退化している。そのような点では法方向は光的になっており、曲面は時間的とは言えないが、それを特異点として許容し、曲面の一部と考えるのは、空間的極大曲面の場合と同様である。

Lorentz 面 \overline{M} から、有限個の点 q_1, \dots, q_n を除いたものを $\check{M} = \overline{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ とし、 \check{g} を \overline{M} 上の para 有理型関数、 $\check{\eta}$ を \overline{M} 上の para 有理型 1 次微分形式で $\check{\Phi}$ が \check{M} 上正則となるようなものをとれば、 \check{X} は (特異点集合を持つ) 共形極小はめ込みとなる。ただし、空間的極大曲面同様に、その像は必ずしも完備とは限らない。各 q_j の近傍の像を **end q_j** と呼び、 $\check{G}(q_j) = \check{\sigma}^{-1} \circ \check{g}(q_j)$ を **end q_j** における **limit normal** と呼ぶ。

ここで特に注意しなければならないのが 0 因子の影響である。
para 複素数においては、

$$(1 + j)(1 - j) = 1 - j^2 = 0$$

より

$$\mathcal{S} := (1 + j)\mathbf{R} \cup (1 - j)\mathbf{R}$$

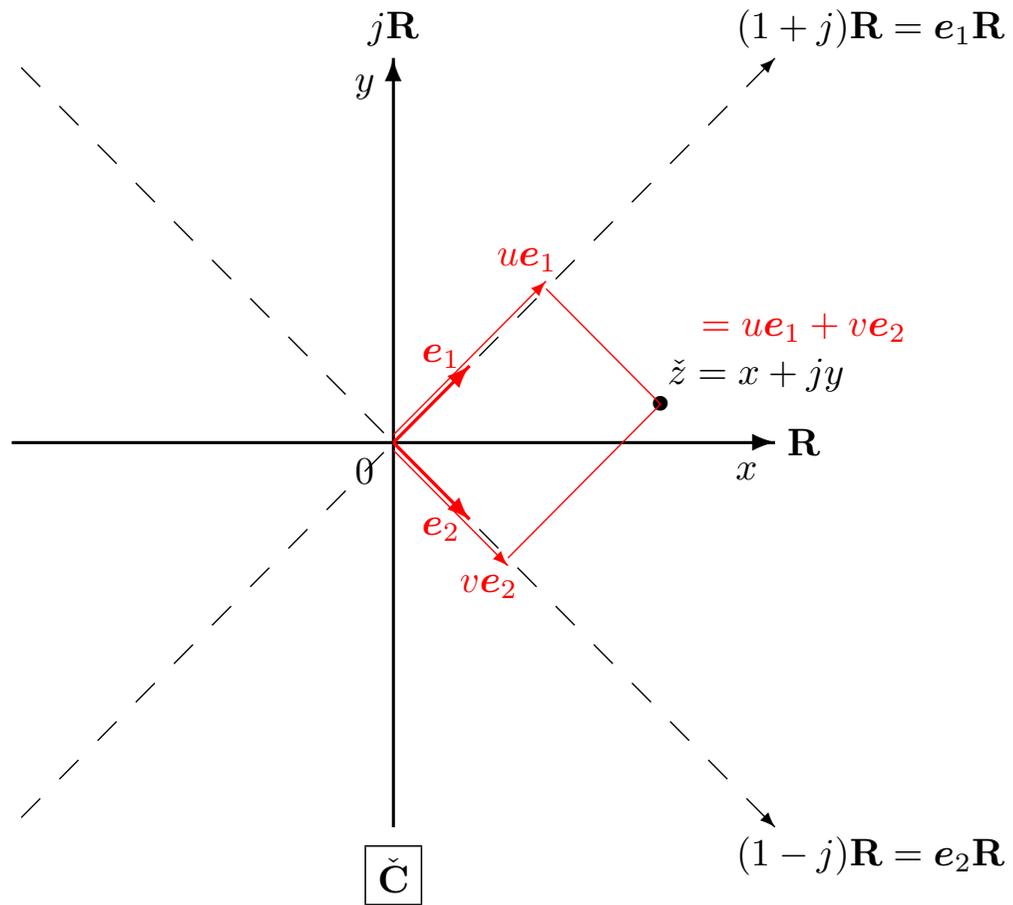
の元は乗法の逆元を持たない。今

$$\mathbf{e}_1 := \frac{1 + j}{2}, \quad \mathbf{e}_2 := \frac{1 - j}{2}$$

とおけば、任意の para 複素数は

$$\begin{aligned} \check{z} &= x + jy = x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + y(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\ &= (x + y)\mathbf{e}_1 + (x - y)\mathbf{e}_2 =: u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

と表すことができる。この (u, v) を null 座標と呼ぶ。



$$\check{z} \in \mathbf{e}_1 \mathbf{R} = (1 + j) \mathbf{R} \iff v = 0$$

$$\check{z} \in \mathbf{e}_2 \mathbf{R} = (1 - j) \mathbf{R} \iff u = 0$$

である。

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0$$

から直ちに

$$\check{z}^n =: u^n \mathbf{e}_1 + v^n \mathbf{e}_2 \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$$

また $\check{z} \notin \mathcal{S}$ については

$$\check{z}^{-n} =: u^{-n} \mathbf{e}_1 + v^{-n} \mathbf{e}_2 \quad (n \in \mathbf{N})$$

も成り立つことがわかる。

さらに

$$\check{c} = a + jb = (a + b)\mathbf{e}_1 + (a - b)\mathbf{e}_2 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$$

に対し、

$$\check{c}\check{z} = \alpha u\mathbf{e}_1 + \beta v\mathbf{e}_2$$

に注意すると、一般に Laurent 展開された原点で極を持つ para 有理型関数

$$\check{\varphi}(\check{z}) = \sum_{k=-K}^{+\infty} \check{c}_k \check{z}^k$$

に対し、

$$\check{\varphi}(\check{z}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k u^k \mathbf{e}_1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k v^k \mathbf{e}_2$$

より、その実部は

$$\operatorname{Re}\check{\varphi}(\check{z}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{2} u^k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_k}{2} v^k$$

と u, v それぞれに関する互いに独立な有理型の実関数の和として表され、 $\check{\varphi}(\check{z})$ の Laurent 展開の主要部の係数が全て $(1+j)\mathbf{R}$ または $(1-j)\mathbf{R}$ のどちらか一方に含まれる場合を除き、0 因子の集合 S 上の各点で「極」を持つ。従って各 end は 1 点ではなく、その 0 因子によって、少なくともその近傍は 4 個の連結成分に分断されることになる。

例13.4. $\check{g} = \check{z}^{-1}$, $\check{\eta} = j \left(\frac{1}{\check{z} - 1} + \frac{1}{\check{z} + 1} \right)^2 d\check{z}$, $\check{z}_0 = ???$ で定義される時間的極小曲面は

$$\begin{aligned} \check{X}(\check{z}) &= \left(-2y \left\{ \frac{-1}{(x-1)^2 - y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 - y^2} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \log \left\{ \pm \frac{(x-1)^2 - y^2}{(x+1)^2 - y^2} \right\}, \right. \\ &\quad \left. -2y \left\{ \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right\} \right) \\ &= \left(\frac{2y}{(x+1)^2 - y^2} (\pm e^{-x_2} - 1), x_2, \frac{2y}{(x+1)^2 - y^2} (\mp e^{-x_2} - 1) \right) \end{aligned}$$

((計算))

$$\eta = j \left\{ \frac{1}{(\check{z} - 1)^2} + \frac{1}{(\check{z} + 1)^2} + \frac{1}{\check{z} - 1} - \frac{1}{\check{z} + 1} \right\} d\check{z},$$

$$g\eta = j \left(\frac{1}{\check{z} - 1} + \frac{1}{\check{z} + 1} \right) \left(\frac{1}{\check{z} - 1} - \frac{1}{\check{z} + 1} \right) d\check{z}$$

$$= j \left\{ \frac{1}{(\check{z} - 1)^2} - \frac{1}{(\check{z} + 1)^2} \right\} d\check{z},$$

$$g^2\eta = j \left(\frac{1}{\check{z} - 1} - \frac{1}{\check{z} + 1} \right)^2 d\check{z}$$

$$= j \left\{ \frac{1}{(\check{z} - 1)^2} + \frac{1}{(\check{z} + 1)^2} - \frac{1}{\check{z} - 1} + \frac{1}{\check{z} + 1} \right\} d\check{z}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
& \int^{\check{z}} \left(j \left\{ \frac{2}{(\check{z} - 1)^2} + \frac{-2}{(\check{z} + 1)^2} \right\}, \left(\frac{-2}{\check{z} - 1} + \frac{2}{\check{z} + 1} \right), \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. j \left\{ \frac{-2}{(\check{z} - 1)^2} + \frac{-2}{(\check{z} + 1)^2} \right\} \right) d\check{z} \\
& = \left(j \left(-\frac{2}{\check{z} - 1} + \frac{2}{\check{z} + 1} \right), 2 \log(\check{z} - 1) - 2 \log(\check{z} + 1), \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. j \left(\frac{2}{\check{z} - 1} + \frac{2}{\check{z} + 1} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(j \left\{ -\frac{2(x-1) - 2jy}{(x-1)^2 - y^2} + \frac{2(x+1) - 2jy}{(x+1)^2 - y^2} \right\} \right. \\
&\quad \log\{|(x-1)^2 - y^2|\} + 2j \tanh^{-1} \frac{y}{x-1} \\
&\quad \quad \quad - \log\{|(x+1)^2 - y^2|\} - 2j \tanh^{-1} \frac{y}{x+1}, \\
&\quad \left. j \left\{ \frac{2(x-1) - 2jy}{(x-1)^2 - y^2} + \frac{2(x+1) - 2jy}{(x+1)^2 - y^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

) であり、特に

$$(x + 1 + y)(x + 1 - y)(x - 1 + y)(x - 1 - y) < 0$$

の部分の像は、二つの連結成分に別れ、どちらの成分も第2種の helicoid の型変化を伴う延長(もちろん線織面)

$$\frac{x_3}{x_1} = \tanh \frac{x_2}{2}$$

になっている。

一方

$$(x + 1 + y)(x + 1 - y)(x - 1 + y)(x - 1 - y) > 0$$

の部分の像もまた、二つの連結成分に分かれ、どちらの成分も線織面

$$\frac{x_3}{x_1} = \coth \frac{x_2}{2}$$

である。

特異点集合 $|\check{g}| = 1$ は直角双曲線 $|\check{z}| = 1$ で、上記の前者のみに現れて、折り目特異点となって、型変化の境界線の役回りをしている。

一方、後者は特異点を持たないが、二つの連結成分の像がぴったり重なるため、全体像としては、三つに分かれているように見える。

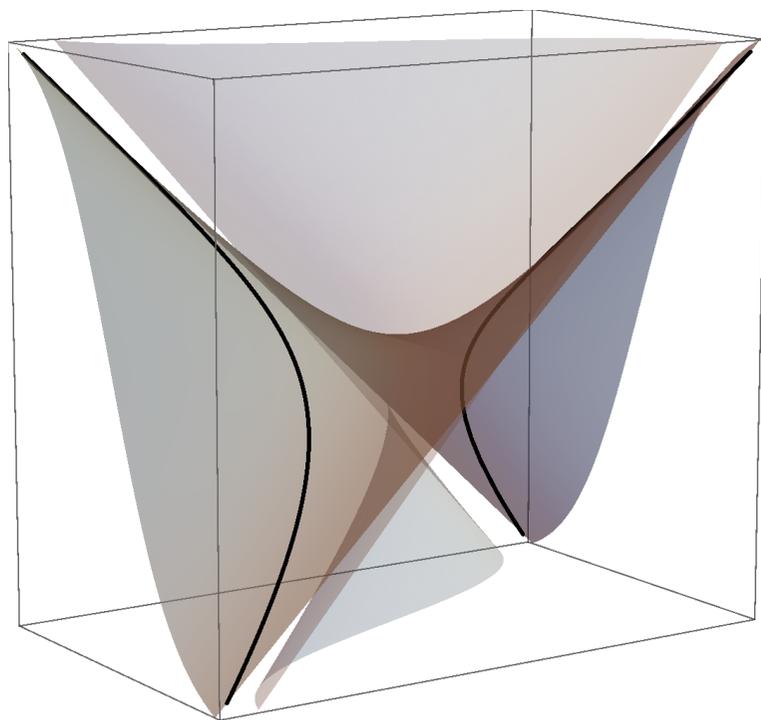
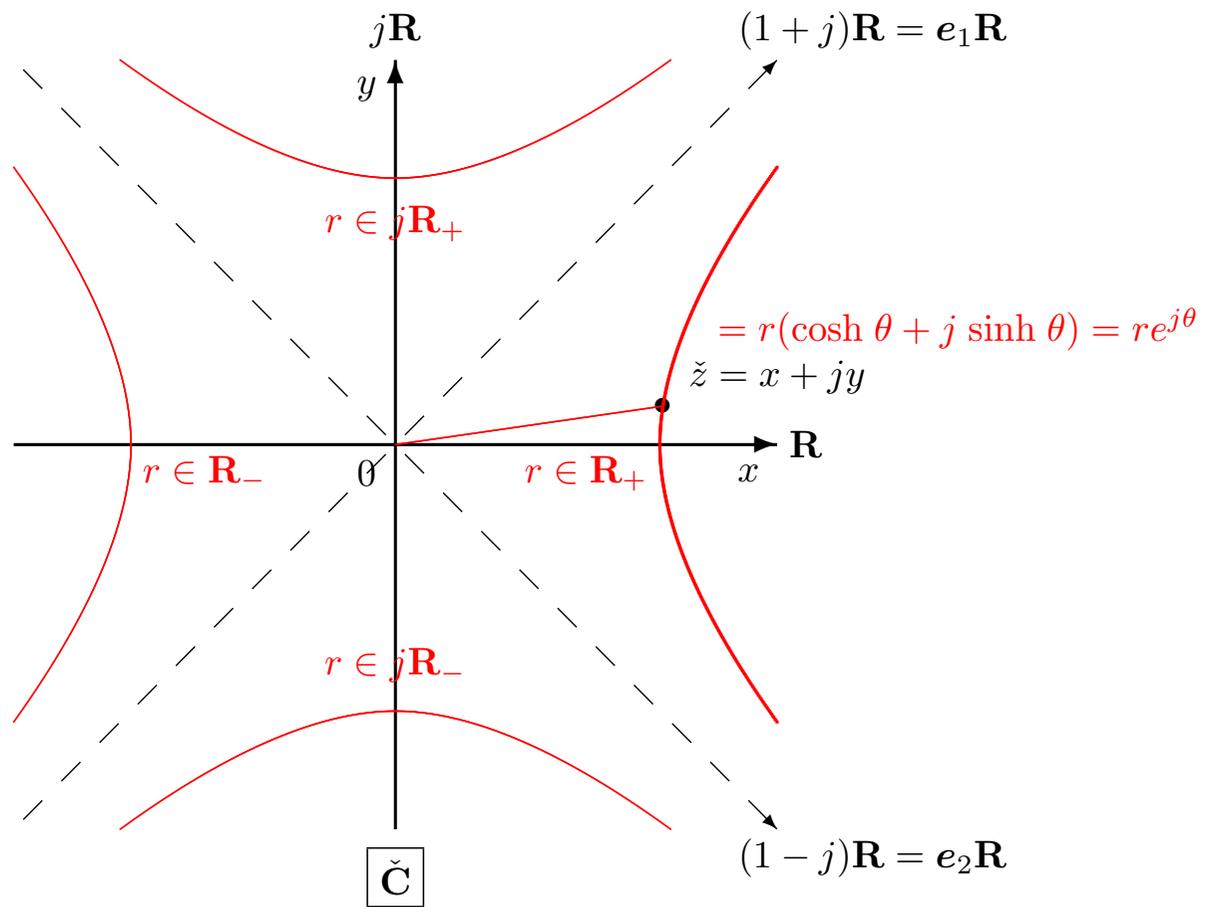


図 13.1 第2種の helicoid とその延長

このように、各 end の近傍は分断されるため、その周囲を回る閉曲線はそもそもとれず、またそもそも para 複素数の偏角は

$$\check{z} = r(\cosh \theta + j \sinh \theta) \quad (x > |y| \text{ の場合})$$

のように定められるため、log の項があっても周期は発生しないので、flux の出番は無さそうで、また異なる連結成分同志の位置関係に説得力のある制約は無さそうに見えるが、実はそうではないと言うのが、次節で扱う話題の一つである。



なお、特に Laurent 展開が実係数のとき u, v それぞれの実関数は「一致」することにちょっと注意を促しておく。

また、この表示を用いて Weierstrass data を

$$\check{g} = g_1(u)\mathbf{e}_1 + g_2(v)\mathbf{e}_2, \quad \check{\eta} = \eta_1(u)\mathbf{e}_1 + \eta_2(v)\mathbf{e}_2$$

と分解しておく、表現公式自体も

$$\begin{aligned} \check{X}(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) = \operatorname{Re} \int_{u_0\mathbf{e}_1 + v_0\mathbf{e}_2}^{u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2} & \\ & (2(g_1(u)\mathbf{e}_1 + g_2(v)\mathbf{e}_2), \\ & (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\{(1 - g_1(u)^2)\mathbf{e}_1 + (1 - g_2(v)^2)\mathbf{e}_2\}, \\ & -\{(1 + g_1(u)^2)\mathbf{e}_1 + (1 + g_2(v)^2)\mathbf{e}_2\}) \\ & \eta_1(u)\mathbf{e}_1 + \eta_2(v)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \int_{u_0 \mathbf{e}_1 + v_0 \mathbf{e}_2}^{u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2} \\
&\quad (2g_1(u), 1 - g_1(u)^2, -(1 + g_1(u)^2)) \eta_1(u) \mathbf{e}_1 \\
&\quad + (2g_2(v), -(1 - g_2(v)^2), -(1 + g_2(v)^2)) \eta_2(v) \mathbf{e}_2 \\
&= \int_{u_0}^u \frac{1}{2} (2g_1(u), 1 - g_1(u)^2, -(1 + g_1(u)^2)) \eta_1(u) \\
&\quad + \int_{v_0}^v \frac{1}{2} (2g_2(v), -(1 - g_2(v)^2), -(1 + g_2(v)^2)) \eta_2(v)
\end{aligned}$$

と書き直すことができる。時間的極小曲面の表現公式としては、こちらの type の方が寧ろ一般的かもしれない(分解の仕方は文献によって異なるので、符号等の相違はある)。

参考文献

Akamine: Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities, Hokkaido Math. J. **48**, 537-568 (2019).

Kobayashi: Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbf{L}^3 , Tokyo J. Math. **6**, 297-309 (1983).

Kobayashi: Maximal surfaces with conelike singularities, J. Math. Soc. Japan **36**, 609-617 (1984).

14 平均曲率 0 曲面の双複素拡張

14.1 序

本節の内容は、橋本要氏(大阪市立大学数学研究所・大和大学)との共同研究に基づくものである。近年日韓の研究者を中心に発展の著しい平均曲率 0 曲面の型変化の双複素拡張を利用した approach について、お話したい。

14.2 表現公式の統一

3次元 Lorentz 空間 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面における折り目特異点とは、generic には cusp 辺として特異点集合をなす null 曲線の両翼が完全に重なってしまった状態のことを指す。2枚重ねであることから、3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 内の向き付け不可能な極小曲面の2重被覆同様、反正則対合に関する同変性によって記述されるが、この場合、向き付け不可能の場合と違って、対合は不動点集合を持ち、これが特異点集合に他ならない。そして、この折り目特異点が、平均曲率0曲面の計量の型変化を誘導することが知られている。

通常よく用いられる type の Weierstrass 型表現公式においては、法方向が光的となることから来る特異点集合は、折り目特異点に限らず、Gauss 写像 g が $|g| = 1$ を満たす点の集まりとして表されるが、上記の型変化を観察するためには、特異点集合が $g \in \mathbf{R}$ と表される次の形の公式の方がより適しているのでは？と考えたのが、本研究の出発点であった。

$$(14.1) \quad X(z) = \operatorname{Re} \int^z t(1 - g^2, 2g, 1 + g^2) f dz.$$

ここで、特異点集合自身の定義域における局所座標も実軸上にとれば、折り目特異点を持つための条件は

$$(14.2) \quad g(\bar{z}) = \overline{g(z)}, \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

と、極めて平易な形で表されることになる。

4次元 neutral 空間 $\mathbf{R}^{2,2}$ 内においても同様に、公式

$$(14.3) \quad X(z) = \operatorname{Re} \int^z t (1 - g_I g_{II}, g_I + g_{II}, 1 + g_I g_{II}, g_I - g_{II}) f dz$$

を用いれば、折り目特異点を持つための条件は

$$(14.4) \quad g_I(\bar{z}) = \overline{g_I(z)}, \quad g_{II}(\bar{z}) = \overline{g_{II}(z)}, \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

と表される。特にこの形は、負定値領域を持つ曲面の連続変形における、同領域の折り目特異点への退化の観察も容易にする。

実は、これらの記述において、写像の共形性はどこにも用いられておらず、より一般に \mathbf{R}^N (不定値であれば、計量の type は特に限定しない) への調和写像について、書き直してみると、次のようになる。

$$\varphi^1(z), \dots, \varphi^N(z)$$

は、実軸と共通部分を持つ \mathbb{C} 内の領域で正則な関数とし、

$$\Phi(z) := {}^t(\varphi^1(z), \dots, \varphi^N(z)),$$

$$F(z) := \operatorname{Re} \Phi(z)$$

と定義する。

$$\varphi^1(\bar{z}) = \overline{\varphi^1(z)}, \dots, \varphi^N(\bar{z}) = \overline{\varphi^N(z)}$$

のとき、写像 F は実軸上で折り目特異点を持つ。

以上の考察が、parameter の複素数 z を para 複素数 \tilde{z} に置き換えても、全くそのまま通用し、折り目特異点を超えた実解析的延長の先が、共通の式を用いて表されるのが、表示 (14.1) または (14.3) を用いる最大の利点である。

14.3 双複素拡張

z と \tilde{z} それぞれに関する写像を統一的に扱うことは、写像を
始めから実 4 次元の Clifford 代数

$$\mathbf{B} := \{ \tilde{z} = x_1 + i_1 x_2 + i_2 x_3 + j x_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R} \},$$
$$i_1^2 = i_2^2 = -1, \quad i_1 i_2 = i_2 i_1 = j, \quad (j^2 = 1)$$

の上で定義しておくことによって正当化される。 z と \tilde{z} はそれぞれ

$$\mathbf{C}(i_2) := \{ z = x_1 + i_2 x_3 \},$$
$$\mathbf{D} := \{ \tilde{z} = x_1 + j x_4 \}$$

の元として \mathbf{B} に含まれている。 \mathbf{B} の元 \tilde{z} は一般に双複素数 (bicomplex number) と呼ばれる。

以下の考察では

$$\mathbf{C}(i_1) := \{\zeta = x_1 + i_1 x_2\}$$

も必要となるので、あらかじめ用意しておく。また、 i_1, i_2 に関する複素共役をそれぞれ

$$\tilde{z}^{\dagger 1} := x_1 - i_1 x_2 + i_2 x_3 - j x_4,$$

$$\tilde{z}^{\dagger 2} := x_1 + i_1 x_2 - i_2 x_3 - j x_4$$

で表す。

$$\tilde{z}^{\dagger 3} := \tilde{z}^{\dagger 1 \dagger 2} = x_1 - i_1 x_2 - i_2 x_3 + j x_4$$

とおく。

$\tilde{z} = x_1 + i_1x_2 + i_2x_3 + jx_4$ の実部 x_1 及び虚部 x_2, x_3, x_4 は複素共役を用いて次のように復元される。

$$x_1 = \frac{1}{4}(\tilde{z} + \tilde{z}^{\dagger 1} + \tilde{z}^{\dagger 2} + \tilde{z}^{\dagger 3}),$$

$$x_2 = \frac{1}{4i_1}(\tilde{z} - \tilde{z}^{\dagger 1} + \tilde{z}^{\dagger 2} - \tilde{z}^{\dagger 3}),$$

$$x_3 = \frac{1}{4i_2}(\tilde{z} + \tilde{z}^{\dagger 1} - \tilde{z}^{\dagger 2} - \tilde{z}^{\dagger 3}),$$

$$x_4 = \frac{1}{4j}(\tilde{z} - \tilde{z}^{\dagger 1} - \tilde{z}^{\dagger 2} + \tilde{z}^{\dagger 3})$$

通常、双複素数の絶対値と偏角は、各複素共役に対して別個に定義され、複素または para 複素数値をとるようであるが、ここでは、絶対値 $|\tilde{z}|$ はあくまで非負の実数値を取るよう、次のように定義したい。

$$\begin{aligned} |\tilde{z}|^4 &= \tilde{z}\tilde{z}^\dagger_1\tilde{z}^\dagger_2\tilde{z}^\dagger_3 \\ &= \{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\}\{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\} \end{aligned}$$

para 複素数同様に、双複素数には 0 因子が存在する。その全体を S で表すと

$$\begin{aligned} S &= \{\tilde{z} \mid |\tilde{z}| = 0\} = (1 + j)\mathbf{C}(i_1) \cup (1 - j)\mathbf{C}(i_1) \\ &= (1 + j)\mathbf{B} \cup (1 - j)\mathbf{B} \end{aligned}$$

となる。任意の $\tilde{z} \notin S$ に対し、その逆数は

$$\frac{1}{\tilde{z}} = \frac{\tilde{z}^\dagger_1 \tilde{z}^\dagger_2 \tilde{z}^\dagger_3}{|\tilde{z}|^4}$$

で与えられる。

これに対応して、偏角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を

$$\tilde{z} = r e^{i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2 + j \theta_3}$$

を満たすように定めることにする。ここでももちろん $r = |\tilde{z}|$ であり、また

$$e^{i_1 \theta_1} = \cos \theta_1 + i_1 \sin \theta_1,$$

$$e^{i_2 \theta_2} = \cos \theta_2 + i_2 \sin \theta_2,$$

$$e^{j \theta_3} = \cosh \theta_3 + j \sinh \theta_3$$

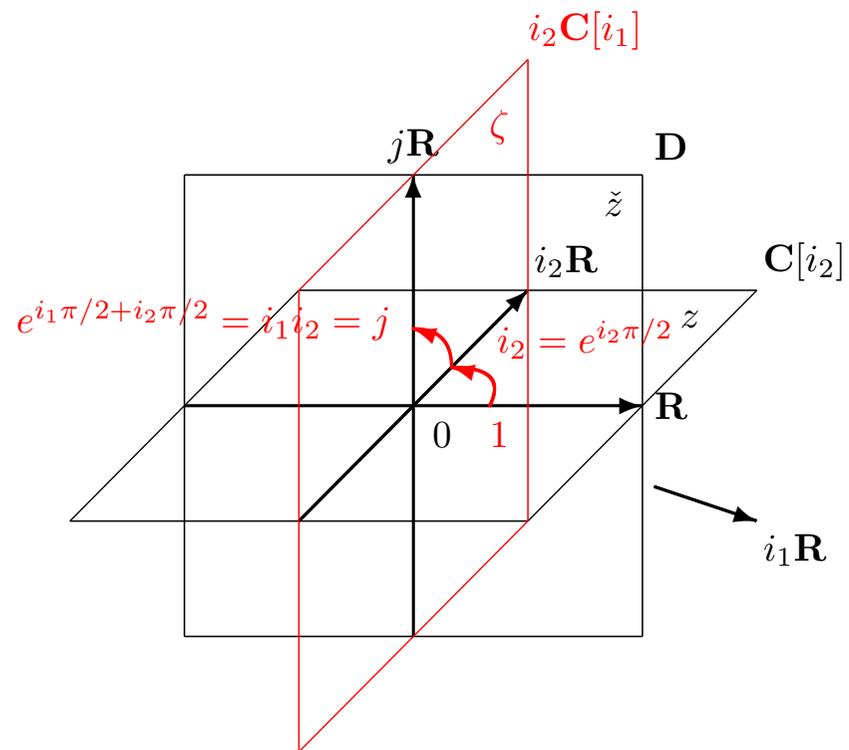
である。これらの偏角は次式により求められる。

$$r^2 e^{2i_1 \theta_1} = \tilde{z} \tilde{z}^\dagger_2, \quad r^2 e^{2i_2 \theta_2} = \tilde{z} \tilde{z}^\dagger_1, \quad r^2 e^{2j \theta_3} = \tilde{z} \tilde{z}^\dagger_3$$

複素数の偏角同様、 (θ_1, θ_2) に一意性はないが、
 $(\pi, \pi)\mathbf{Z} + (\pi, -\pi)\mathbf{Z}$ を法として定まる。なお、この定義に従えば、 $|j| = 1$ であり、 j の極座標表示は

$$j = i_1 i_2 = e^{i_1 \pi(N_1 + 1/2) + i_2 \pi(N_2 + 1/2)} \quad (N_1, N_2 \in \mathbf{Z}, N_1 + N_2 : \text{偶数})$$

となる。



今

$$\begin{aligned}\tilde{w}(\tilde{z}) &= u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + i_1 u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\quad + i_2 u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + j u_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}$$

を B の開集合 Ω 上で定義された双複素関数とする。その双複素微分 $\tilde{w}_{\tilde{z}}$ は、複素関数の複素微分同様に

$$\tilde{w}_{\tilde{z}} = \tilde{w}_{x_1} = \frac{\tilde{w}_{x_2}}{i_1} = \frac{\tilde{w}_{x_3}}{i_2} = \frac{\tilde{w}_{x_4}}{j}$$

を満たすよう定義され、その意味で微分可能な関数を双複素正則関数と呼ぶ。双複素版の Cauchy-Riemann の方程式は次で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1)_{x_1} = (u_2)_{x_2} = (u_3)_{x_3} = (u_4)_{x_4}, \\ (u_2)_{x_1} = -(u_1)_{x_2} = (u_4)_{x_3} = -(u_3)_{x_4}, \\ (u_3)_{x_1} = (u_4)_{x_2} = -(u_1)_{x_3} = -(u_2)_{x_4}, \\ (u_4)_{x_1} = -(u_3)_{x_2} = -(u_2)_{x_3} = (u_1)_{x_4} \end{array} \right.$$

これからもわかるように、双複素正則関数は \mathbf{B} を $\mathbf{C}(i_1)^2$, $\mathbf{C}(i_2)^2$, \mathbf{D}^2 のいずれに見立てても、それぞれの意味で正則となるような写像である。

その他双複素数全般に関する用語や表記は列挙し始めるときりが無いので、ここではこれ以上のことは省略する。

以下、

$$\varphi^1(\tilde{z}), \dots, \varphi^N(\tilde{z})$$

は、実軸と共通部分を持つ \mathbf{B} 内の領域で双複素正則な関数とする。

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{z}) &:= {}^t(\varphi^1(\tilde{z}), \dots, \varphi^N(\tilde{z})), \\ F(\tilde{z}) &:= \operatorname{Re} \Phi(\tilde{z}) + i_1 \operatorname{Im}_{i_1} \Phi(\tilde{z})\end{aligned}$$

と定義する。 $\mathbf{C}(i_1)^N$ を $\mathbf{R}^{2N_+, 2N_-}$ と見て標準計量を入れるとき、その type によらずこの写像 F の平均曲率 vector 場は 0 となる。特に、

$$(14.5) \quad \varphi^1(\tilde{z}^{\dagger 2}) = \varphi^1(\tilde{z})^{\dagger 2}, \dots, \varphi^N(\tilde{z}^{\dagger 2}) = \varphi^N(\tilde{z})^{\dagger 2}$$

のとき、 $F|_{\mathbf{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbf{D}}$ は実軸上で折り目特異点を持ち、互いに実解析的延長となっている。

このことは、条件 (14.5) の下、 $x_1 \in \mathbf{R}$ を固定する毎に、 $F|_{x_1+i_2\mathbf{C}(i_1)}$ が parameter $\zeta \in \mathbf{C}(i_1)$ に関する even な正則写像となっていることから明らかである。言い換えれば、折り目特異点は **even** な双複素拡張の分岐点である。点 $F(x_1) \in \mathbf{C}(i_1)^N$ の近傍における像の曲面の正則性は

$$\text{rank } \langle \Phi_{\tilde{z}}(x_1), \Phi_{\tilde{z}\tilde{z}}(x_1) \rangle = 2$$

のとき保証される。

$\mathbf{R}^{2,1}$ または $\mathbf{R}^{2,2}$ 内の空間的極大曲面の時間的極小曲面への実解析的延長は、この特別な場合と見ることができる。実際、条件 (14.2) または (14.4) の下では、(14.5) に加えて

$$\varphi^1(\tilde{z}^{\dagger\ell}) = \varphi^1(\tilde{z})^{\dagger\ell}, \dots, \varphi^N(\tilde{z}^{\dagger\ell}) = \varphi^N(\tilde{z})^{\dagger\ell} \quad (\ell = 1, 2, 3)$$

を満たすため、 $F|_{\mathbf{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbf{D}}$ は共に $\mathbf{C}(i_1)^N$ ($N = 3$ または 4) の実部である $\mathbf{R}^{2,1}$ または $\mathbf{R}^{2,2}$ に値をとり、かつ互いに実解析的延長となっている。

14.4 完備でない end を超える延長

一般に平均曲率 0 曲面の計量の型変化は、折り目特異点をなす null 曲線か、または光的直線のいずれかに限って現れることが知られている。光的直線まで Weierstrass data が延長可能な場合、正則な g が直線全体に渡って連続的に同じ値をとることは、定数となる場合を除いて起こりえないので、この直線は、定義域における 1 点が、完備でない end として広がったものでなければならない。実際、写像としての実解析的延長は、Laurent 展開の主要部が奇数次の項のみからなる場合、常に実現される。

具体的に述べると、写像 Φ が原点で

$$\Phi(\tilde{z}) = \sum_{k=1; k:\text{odd}}^K \frac{1}{\tilde{z}^k} V_{-k} + \Phi_{\text{hol}}(\tilde{z}),$$

と展開されるとき、任意の $s \in \mathbf{R}$ に対し、 $F(s\zeta^{K+1} + i_2\zeta)$ は $\zeta \in \mathbf{C}(i_1)$ に関する even な正則写像となり、 $F|_{\mathbf{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbf{D}}$ は直線 $\mathbf{R}V_{-K} + \text{Re } \Phi_{\text{hol}}(0)$ を挟んで互いに実解析的延長となっている。直線上の generic な点における像の曲面の正則性は

$$\max\{\text{rank } \langle V_{-K}, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}\tilde{z}}(0) \rangle, \text{rank } \langle V_{-K}, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}}(0) \rangle\} = 2 \quad (K = 1),$$

$$\max\{\text{rank } \langle V_{-K}, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}\tilde{z}}(0) \rangle, \text{rank } \langle V_{-K}, V_{2-K} \rangle\} = 2 \quad (K \geq 3; K : \text{odd})$$

のとき保証される。

$\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面と時間的極小曲面の中で、恐らく最も簡単な例は、

$$\tilde{g} = -\tilde{z}^{m+2}, \quad \tilde{f} = -\frac{1}{\tilde{z}^2}$$

で与えられる。 $m = 0, 1$ のとき、像の曲面は滑らかに延長されるが、それ以外の場合には、光的直線が特異点集合となる。

14.5 0 因子を超える延長

§14.4 では、平均曲率 0 曲面の双複素拡張を用いた、もしくは双複素正則写像を用いて定義される写像についての、完備でない end を超える延長について述べたが、完備な end を超える場合についても、双複素拡張により一定の考察を加えることができる。

一般に、時間的極小曲面においては、0 因子の存在によって、定義域の分断が余儀なくされるが、この部分は一般には完備な end となって現れることが多い。一方、双複素拡張においては、0 因子の集合

$$(1 + j)\mathbf{C}(i_1) \cup (1 - j)\mathbf{C}(i_1)$$

が余次元 2 となるため、これによって定義域が分断されることはない。さらに、0 因子の周囲の flux は、実部には現れない、すなわち、一般に $\mathbf{B} \supset \mathbf{D}$ において、0 因子により実軸(0 を除く)と分断される部分にある

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= (-1)^{N_1+N_2} r (\sinh \theta_3 + j \cosh \theta_3) \\ &= r e^{i_1(N_1+1/2)\pi + i_2(N_2+1/2)\pi + j\theta_3} \quad (N_1, N_2 \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

に対し、

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \{ (a_1 + ja_4) \log \tilde{z} \} \\
&= \operatorname{Re} \left[(a_1 + ja_4) \left\{ \log r + i_1 \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \pi + i_2 \left(N_2 + \frac{1}{2} \right) \pi + j\theta_3 \right\} \right] \\
&= a_1 \log r + a_4 \theta_3
\end{aligned}$$

は well-defined となるため、0 因子を超え、end を回り込んだの延長が常に一意的に定義されることになる。これは null 座標を用いたよく知られた表示とも矛盾しないものである。このことを用いれば、特に型変化する平均曲率 0 曲面について、Willmore 型の compact 化を定義することも可能となるのである。

15 平均曲率 0 曲面の平面型 end の正則性

15.1 序

本節の内容は、安藤直也氏(熊本大学)、橋本要氏、濱田航平氏(大阪市立大学・大阪府立茨木高等学校)との共同研究に基づくものである。前節における双複素拡張を踏まえた上で、混合型平均曲率 0 曲面の平面型 end の、 $\mathbf{R}^{2,1}$ の compact 化における正則性について得られた結果について、お話したい。

15.2 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の Willmore 型曲面

\mathbf{R}^3 内の compact な Willmore 曲面 M は、平均曲率 H の平方の積分

$$\int_M H^2 dA$$

または

$$\int_M (H^2 - K) dA = \int_M H^2 dA - 2\pi\chi(M)$$

の臨界点として定義される曲面であり、この汎関数の Euler-Lagrange 方程式

$$\Delta H + 2(H^2 - K)H = 0$$

を満たす。このことから、compact でない場合も、この微分方程式を満たす曲面を、Willmore 曲面と呼ぶ。

$H \equiv 0$ のとき、この方程式は明らかに満たされるので、 \mathbf{R}^3 内の極小曲面は同時に Willmore 曲面でもあり、さらに方程式の共形不変性により、その共形変換による像もまた Willmore 曲面となる。特に \mathbf{R}^3 の反転は共形変換であり、従って \mathbf{R}^3 内の極小曲面の反転による像もまた Willmore 曲面となる。ここで \mathbf{R}^3 の反転は、標準的 3 次元球面 S^3 の立体射影による座標近傍系の座標変換に他ならず、従って有限全曲率完備極小曲面の end は、反転により 1 点(の近傍)に局所的に compact 化される。特に埋め込まれた(=主要部が -1 次までの) end の場合、その 1 点において曲面は、flux のある(=対数項のある) catenoid 型の場合には C^1 級、flux の無い(=対数項の無い)平面型の場合には C^∞ 級となることも知られている。

この事実は同時に、立体射影の逆像により得られる S^3 内の曲面に関する正則性を記述するものであるとも考えられる。このような曲面は、汎関数

$$\int_M (H^2 + 1) dA$$

の臨界点と言う意味で、 S^3 内の compact な Willmore 曲面となる。このことを用いて Kusner は、 \mathbf{R}^3 内の (或いは S^3 内の) Willmore 射影平面を構成し、その Willmore energy の最小値を与えている。

一方、 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内においても、 \mathbf{R}^3 の場合同様に、Willmore 型曲面を定義することが可能であり、さらに、その一つの構成法として、 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面の反転が考えられる。その際、平面型 end の局所的な compact 化に正則性を期待するのは、極めて自然なことと言えよう。

本節においては、 $\mathbf{R}^{2,1}$ について、次の compact 化を用いる。

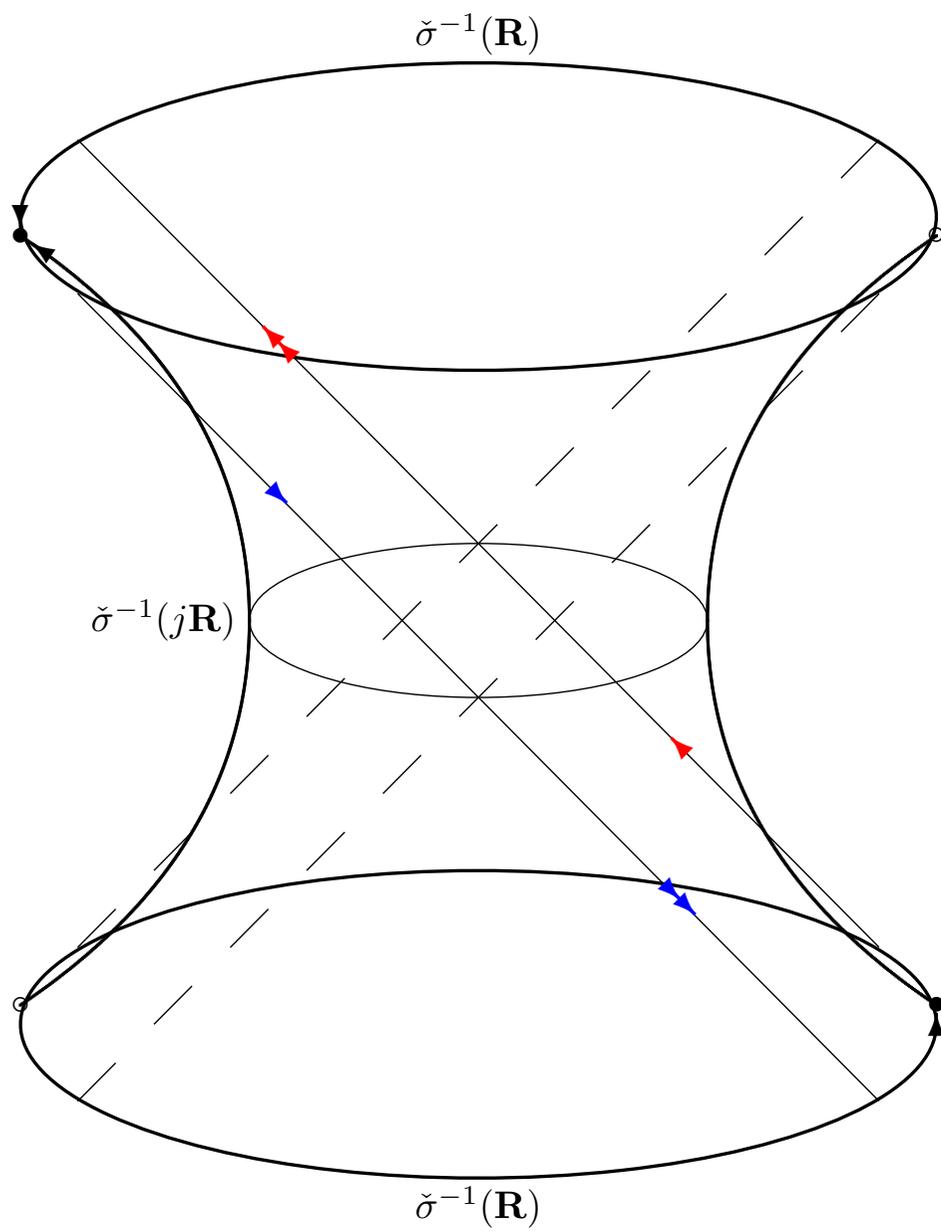
$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{2,1} &\longrightarrow \mathbf{R}P^4 \\ \mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left[\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1}{2} : x_1 : x_2 : x_3 : \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 1}{2} \right] \end{aligned}$$

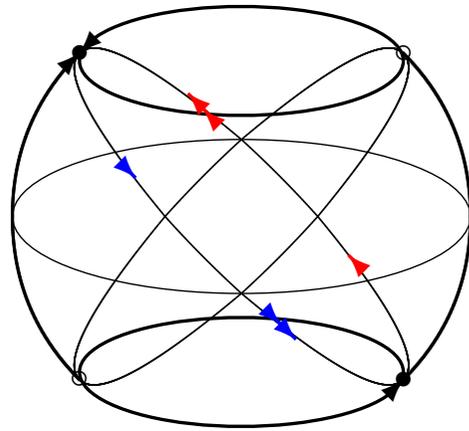
但し、 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ とする。この写像の像の閉包を \hat{L} で表す。

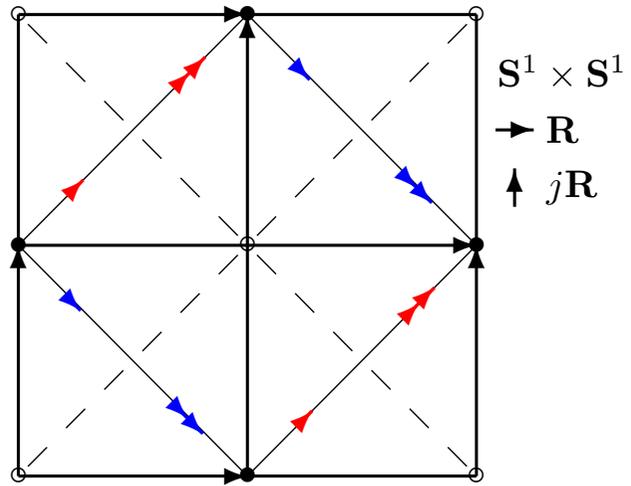
$$\begin{aligned} \hat{L} &:= \{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{R}P^4 \\ &\quad | x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \} \end{aligned}$$

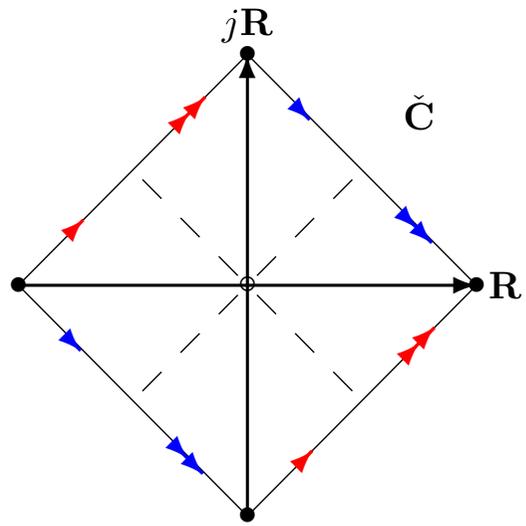
は $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 / \{\pm \text{Id}\}$ と微分同相な 3 次元多様体で、 \mathbf{R}^3 の場合の \mathbf{S}^3 に対応するものである。

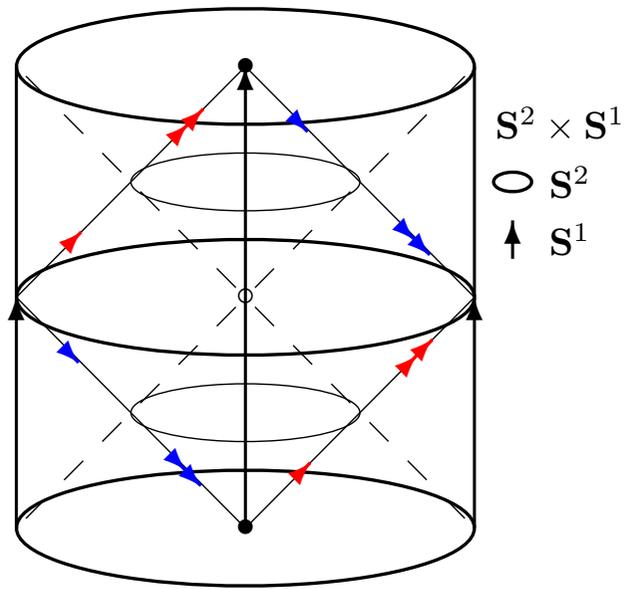
compact 化の際に付け加えられる無限遠点は、 \mathbf{R}^3 の場合 1 点であるが、 $\mathbf{R}^{2,1}$ の場合には 1 点ではなく、無限遠の光錘と呼ばれる 1 次元の集合 $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \hat{L} \mid x_0 = x_4\}$ である。このことによって、 \hat{L} の座標変換の内 1 通りの反転だけでは、1 個の end の状況全てを記述することが出来なくなり、問題は単なる analogy では終わらなくなる。











15.3 空間的並びに時間的平面型 end の場合

\mathbf{R}^3 内の極小曲面の埋め込まれた end の、 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面における対応物を simple end と呼ぶ。これは一般に 6 種類に分類されるが、その内、反転後に滑らかな曲面が期待されるのは、flux が無い (= 対数項の無い) 空間的平面型 end と光的「平面型」end の 2 種類のみである。前者については、 \mathbf{R}^3 内の極小曲面の平面型 end の場合とその漸近挙動も極めて類似しており、無限遠集合における 1 点集合をなし、ほぼ同様の証明により、局所的な compact 化もしくは反転が C^∞ 級となることが確かめられる。状況は多少異なるものの、結論としては時間的極小曲面の場合も併せて、次を得る。

定理 15.1. $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面の空間的平面型 end の反転による像は C^∞ 級である。また $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の実解析的な時間的極小曲面の時間的平面型 end の反転による像も C^∞ 級である。

なお、主要部が -2 次以下の項を含む場合には、反転による像は一般に分岐点またはより複雑な特異点となる。

15.4 光的「平面型」end の場合

一方、光的「平面型」end の場合、状況はもっと複雑である。これは §14.4 で扱った end の内、主要部が -1 次のみからなる場合に相当し、そもそも完備ではなく、曲面が光的直線に沿って切れ落ちており、また、閉包をとっても滑らかにはつながらず、ただ compact 化しても意味をなさないが、§14.4 で述べた事実を、この場合に適用すると、次を得る。

定理 15.2. $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面が折り目特異点を持つとき、その特異点を挟んで実解析的に時間的極小曲面に延長され、さらに、その特異点集合上に光的「平面型」end を持つならば、この end が漸近する光的直線を挟んで時間的極小曲面に、写像として実解析的に延長される。ここで、end $z = z_0$ において $g''(z_0) \neq 0$ または $g'''(z_0) \neq 0$ ならば、像の曲面は光的直線上の generic な点で C^∞ 級である。

ここで、 $z_0 = 0$ ととり、折り目特異点を実軸上にとるならば、1 点を光的直線に広げる操作は、 $x = st, t = \pm y^2$ ($s, t \in \mathbf{R}$) で与えられる。そこで、この延長も併せて compact 化もしくは反転することにより得られる、型変化を許容する Willmore 型曲面の、元は end であった部分の正則性について考えてみたい。

なお、§14.4 の条件を、より一般の、ただし主要部が奇数次の項のみからなるような end を持つ場合に適用すると、generic な点に関する正則性の条件は、 $g''(z_0) \neq 0$ または $g^{(N+2)}(z_0) \neq 0$ (主要部が $-N$ 次以上のとき) となる。

15.5 0 因子の周辺

$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の時間的極小曲面が、空間的極大曲面や \mathbb{R}^3 内の極小曲面と大きく異なる点の一つは、定義域における 1 点のみでは end たりえないということである。これは、時間的極小曲面を記述する para 有理型関数においては、1 点で極を持てば自動的にこれに付随する 0 因子全体で極を持つことになることによる。既に §14.5 で述べたように、この 0 因子の存在により、曲面は定義域からして分断されてしまうものの、0 因子を超える延長が自然に定義されるため、異なる連結成分に属する end を、一体のものとして捉えることが可能である。この意味において、光的「平面型」end を、

(1) 完備でない光的直線部分、(2) 付随する 0 因子の部分、(3) その境目、

の三つの部分に分かれる構造を持つものとして考えたい。

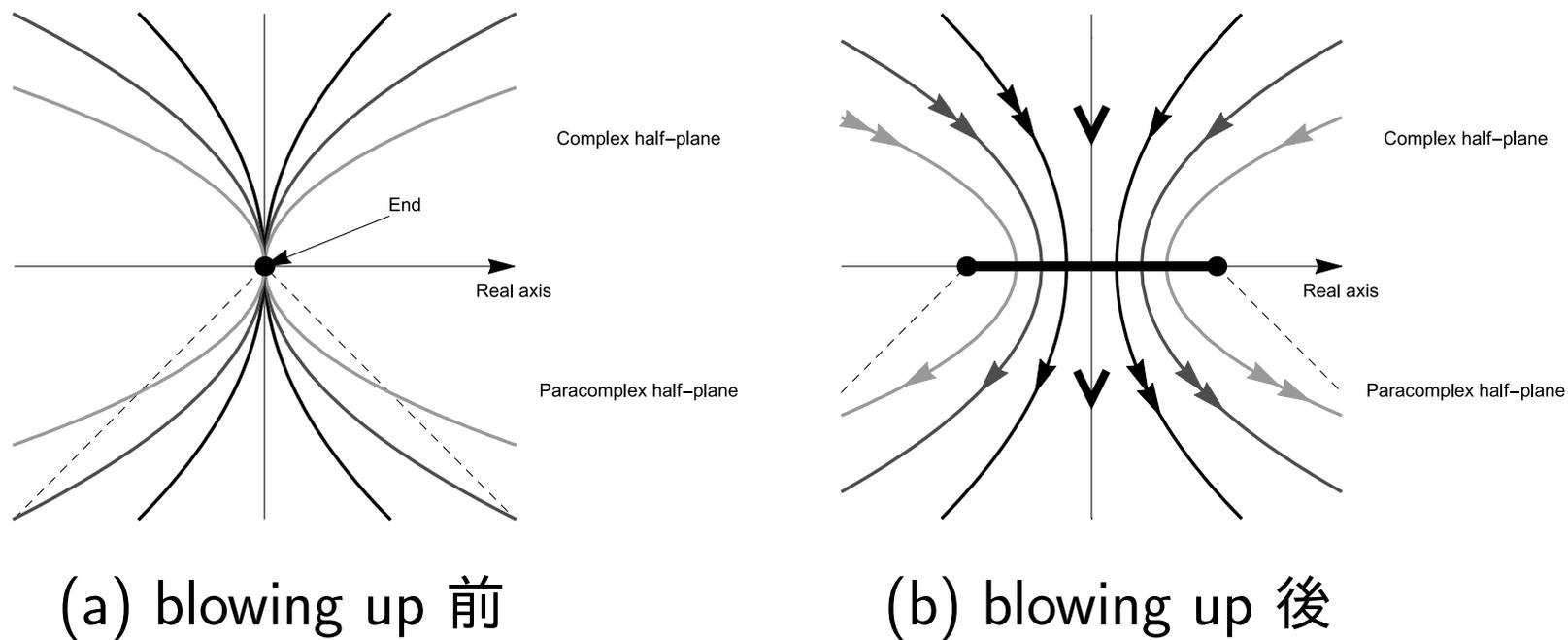


図 15.1

以下、para 複素平面の 0 因子全体の集合を

$\mathcal{S} := (1 + j)\mathbf{R} \cup (1 - j)\mathbf{R}$ と表す。(2) については、次が成り立つ。

定理 15.3. 定理 15.2 の仮定の下、時間的極小曲面の反転は、光的「平面型」end に付随する 0 因子の集合 $z_0 + S \setminus \{0\}$ 上の generic な点で C^∞ 級である。

より一般に Weierstrass data (\check{g}, \check{f}) において、 \check{f} が $\check{z} = \check{z}_0$ で $N(\geq 2)$ 位の極を持ち、 \check{g} が $M(\geq 2)$ 位の $\check{g}(\check{z}_0)$ 点を持つとする。($N = 2$ が光的「平面型」end の場合である。) このとき、 $N > 2$ ならば、一般に上の反転は C^∞ 級ではない。特に $N = 4, M = 2$ のときは cusp 辺をなし、 $2M \leq N - 2$ のときは 1 点集合となる。

$\mathbf{R}^{2,1}$ 内の時間的極小曲面が2個以上の end を持つとき、それらに付随する 0 因子の集合は自然に交わる。このとき、曲面はこの交点の場所に end を持つと見ることもできる。これは para 有理関数の部分分数分解に一意性が無いことによる。よって、この交点における正則性は、limit normal が光的でない end の正則性と見ることがができる。実際、2個の光的「平面型」end の 0 因子の集合の交点の近傍において、曲面の反転は C^∞ 級となる。

一方、次数の異なる end 同志の 0 因子の集合が交わる場合は、一方の end が退化しているから見なければならず、この限りではない。

さて、残る (3) の境目であるが、残念ながら、この 1 点は特異点であることを免れない。

15.6 光的直線の無限遠点における孤立特異点の可能性

§14.4 及び定理 15.2 において、「直線上の generic な点における」と断らなければならなかった理由は、一般にこの直線の特異点集合が横切る可能性があるためである。 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の平均曲率 0 曲面においては、集合 $g \in \mathbf{R}$ または $\check{g} \in \mathbf{R}$ との交差である。

一般に集合 $g \in \mathbf{R}$ または $\check{g} \in \mathbf{R}$ が、ある $s_0 > 0$ に対し、 $-s_0|y|^{K+1} \leq x \leq s_0|y|^{K+1}$ の範囲で原点を通過するならば、特異点集合が光的直線を横切ることになる。また、任意の $s_0 > 0$ に対し、その外側で通過するならば、特異点集合は光的直線に漸近挙動を示し、compact 化の際、光的直線に付加される無限遠点で合流することになる。今、関心の対象である光的直線の無限遠点において、孤立特異点の存在への障害となるのは、この無限遠点での合流の方である。

光的「平面型」end ($K = 1$) の場合、対数項を持たないために $g'(0) = 0$ または $\check{g}'(0) = 0$ が必要である。このとき、空間的極大曲面だけでは、特異点集合の無限遠点での合流は避けられない。従って、孤立特異点が期待できるのは、 $g''(0) \in \mathbf{R}$ で、型変化により折り目特異点を滑らかに延長できる場合に限られる。

一方、(実解析的) 時間的極小曲面では、

$\check{g}''(0) \in \{ \check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}} \mid |x| > |y| \}$ ならば、特異点集合が光的直線に無限遠点で合流するが、

$\check{g}''(0) \in \{ \check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}} \mid |x| \leq |y| \} \setminus \{0\}$ ならば、特異点集合は無限遠点を含めて光的直線周辺は通過しない。よって、空間的極大曲面の場合に比べると、可能性が広がる。0 因子については、 $K = 1$ (§15.5 の $N = 2$) のときに限り C^∞ 級であった。

以上より、光的直線と 0 因子の像の境目において、境目自身を除き、その近傍で曲面が滑らかであるのは、

(i) 混合型で $g''(0) = \check{g}''(0) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(ii) 時間的極小曲面で $\check{g}''(0) \in \{\check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}} \mid |x| \leq |y|\} \setminus \{0\}$

のいずれかの場合に限ることになる。残念ながら、いずれの場合にも、曲面はこの境目において C^∞ 級とはならない。それでは一体どのような特異点が現れるのか、以下で考えたい。

15.7 境目に現れる孤立特異点：混合型の場合

§15.6 の条件 (i) を満たす混合型曲面の Weierstrass data は、次の形で与えられる。

$$(15.1) \quad \begin{aligned} (g, f) &= \left(z^2 g_{\text{hol}}, \frac{\alpha}{z^2} + f_{\text{hol}} \right), \\ (\check{g}, \check{f}) &= \left(\check{z}^2 \check{g}_{\text{hol}}, \frac{\check{\alpha}}{\check{z}^2} + \check{f}_{\text{hol}} \right) \end{aligned}$$

但し $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ で、 $g_{\text{hol}}, f_{\text{hol}}$ は正則関数、 $\check{g}_{\text{hol}}, \check{f}_{\text{hol}}$ は para 正則関数である。条件 (i) より $g_{\text{hol}}(0) = \check{g}_{\text{hol}}(0) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ なので、実はあらかじめ $g_{\text{hol}} \equiv 1, \check{g}_{\text{hol}} \equiv 1$ となるように、局所座標を選んでおくことができる。ここで、特異点の形状をよりよく表示するためには、次のように parameter を取り換えるとよい。

$$(x, \tau) := \begin{cases} \left(x, \frac{x^2 + y^2}{x} \right) & (x + iy \in \mathbf{C}), \\ \left(x, \frac{x^2 - y^2}{x} \right) & (x + jy \in \check{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

$x = 0$ が光的直線、 $\tau = 0$ が 0 因子、 $(x, \tau) = (0, 0)$ がそれらの境目に相当している。今、

$$R_\ell := \operatorname{Re} \int^z g^\ell f dz \quad (z = x + iy \in \mathbf{C}),$$

$$\operatorname{Re} \int^{\check{z}} \check{g}^\ell \check{f} d\check{z} \quad (\check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}}) \quad (\ell = 0, 1, 2)$$

とおけば、 $\mathbf{R}^{2,1}$ の compact 化を $\mathbf{R}P^4$ に埋め込んで表すとき、適当な一次変換を施した後に、この曲面について、次のような表示を得る。

$$\begin{bmatrix} R_1^2 - R_0R_2 \\ R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\alpha^2}{3}x^3 + O(x^5) + O(x^4\tau) + O(x^3\tau^2) + O(x^2\tau^3) \\ -\alpha + O(x\tau) \\ \alpha x\tau + O(x^3\tau) + O(x^2\tau^2) \\ O(x^3\tau) + O(x^2\tau^2) \\ \tau \end{bmatrix}$$

今、仮定 $\alpha \neq 0$ より、 $(x, \tau) = (0, 0)$ の近くでは $-\alpha + O(x\tau) \neq 0$ なので、この項で他の項を割って局所座標がとれ、これをさらに \mathbf{R}^3 へ射影し、頭を丸めた (= 1にした)

$$Y(x, \tau) = \begin{pmatrix} x^3 + O(x^5) + O(x^4\tau) + O(x^3\tau^2) + O(x^2\tau^3) \\ x\tau + O(x^3\tau) + O(x^2\tau^2) \\ \tau + O(x\tau^2) \end{pmatrix}$$

を考える。このような挙動をする特異点は、定義域と値域の座標変換により、どのように整理されるのだろうか？

ここで、どの項を整理するかについては、選択の余地がある。
第 2 項と第 3 項を整理して

$$Y(x, \tau) = {}^t(x^3 + O(x^5) + O(x^4\tau) + O(x^3\tau^2), x\tau, \tau)$$

とすることも可能であるが、ここでは、より整理が進むことと、
曲面を 2 変数関数の graph として表せることをその理由として、
第 1 項と第 3 項を簡単にする方を選ぶことにする。まず定義域と値域に自然な座標変換を施すことにより、

$$Y(x, \tau) = {}^t(x^3, x\tau + O(x^3\tau) + O(x^2\tau^2) + O(x\tau^3), \tau)$$

を得る。

ここで第 1 項が 2 次ならば、第 2 項も x に関して奇数次の項と偶数次の項に分けることで、容易に整理できるのであるが、残念ながら 3 次なので、そう簡単には行かない。それでも 2 次の場合に倣って、

$$Y_2(x, \tau) = x\tau h_1(x^3, \tau) + x^2\tau h_2(x^3, \tau) + x^3\tau h_3(x^3, \tau)$$

(但し h_1, h_2, h_3 は実解析的な関数で、 $h_1(0, 0) = 1, h_2(0, 0) = 0$ を満たす) のように分け、さらに座標変換を繰り返すことにより、次の形を得た (h_4 は実解析的な関数)。

$$Y(x, \tau) = {}^t(x^3, x\tau + x^5\tau h_4(x^3), \tau)$$

第 2 項をこれ以上整理できるか否か、一介の素人に過ぎない講演者には不明である。ただ、少なくとも条件

$$g_{\text{hol}}(z) = g_{\text{hol}3}(z^3), f_{\text{hol}}(z) = z f_{\text{hol}3}(z^3),$$
$$\check{g}_{\text{hol}}(\check{z}) = \check{g}_{\text{hol}3}(\check{z}^3), \check{f}_{\text{hol}}(\check{z}) = \check{z} \check{f}_{\text{hol}3}(\check{z}^3)$$

を満たす正則関数 $g_{\text{hol}3}, f_{\text{hol}3}$ 並びに para 正則関数 $\check{g}_{\text{hol}3}, \check{f}_{\text{hol}3}$ が存在するならば、

$$Y(x, \tau) = {}^t(x^3, x\tau, \tau)$$

を導くことは可能である。

15.8 境目に現れる孤立特異点：時間的極小曲面の場合

一方、§15.6 の条件 (ii) を満たす時間的極小曲面の Weierstrass data もまた、(15.1) 右の形で与えられる。やはり $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ で、 $\check{g}_{\text{hol}}, \check{f}_{\text{hol}}$ は para 正則関数である。

$\check{g}''(0) \in \{\check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}} \mid |x| < |y|\}$ のときは、あらかじめ \check{g}_{hol} が定数となるように、局所座標を選んでおくことができるが、

$\check{g}''(0) \in \{\check{z} = x + jy \in \check{\mathbf{C}} \mid |x| = |y|\} \setminus \{0\}$ のときは、高次の項をまとめることは、一般には不可能である。ここでは、それぞれについて典型的な例を挙げて置く。

前者については、 $\check{g}_{\text{hol}} \equiv j$, $\check{f}_{\text{hol}} \equiv 0$ ととれば、次を得る。

$$Y(y, \tau) = {}^t((y^2 + \tau^2)^{3/2} + 3y^2\tau, y\tau, \tau)$$

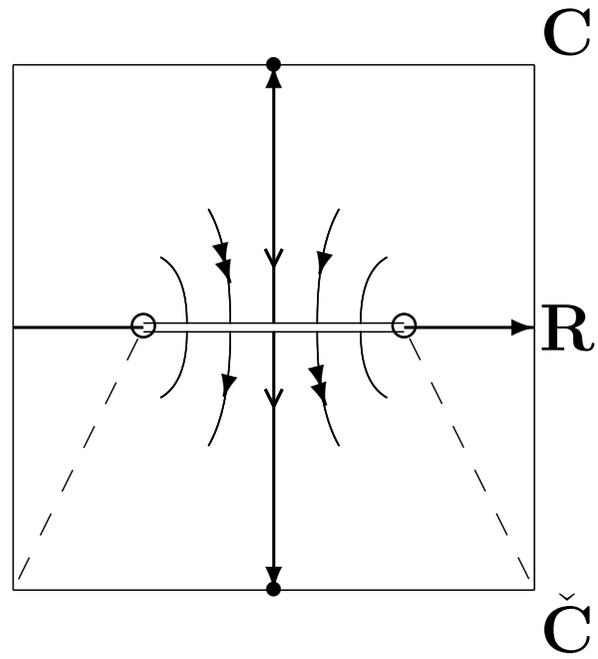
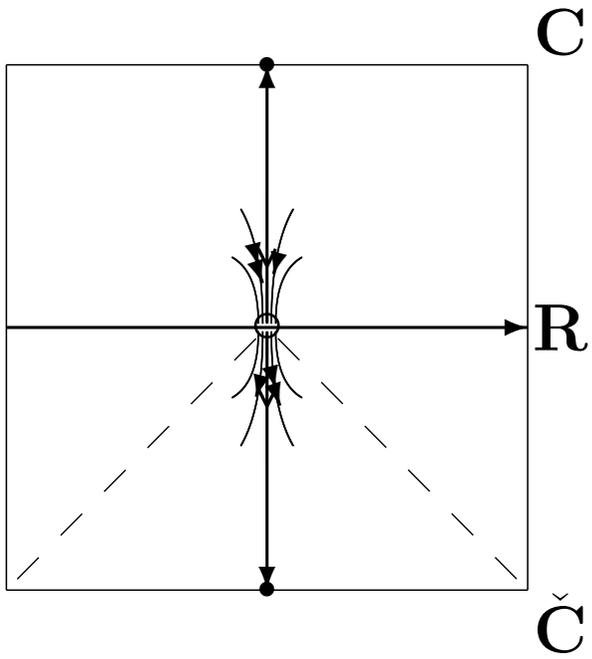
後者については、 $\check{g}_{\text{hol}} \equiv (1 + j)/2$, $\check{f}_{\text{hol}} \equiv 0$ ととれば、 $u = x + y$ を用いて、次を得る。

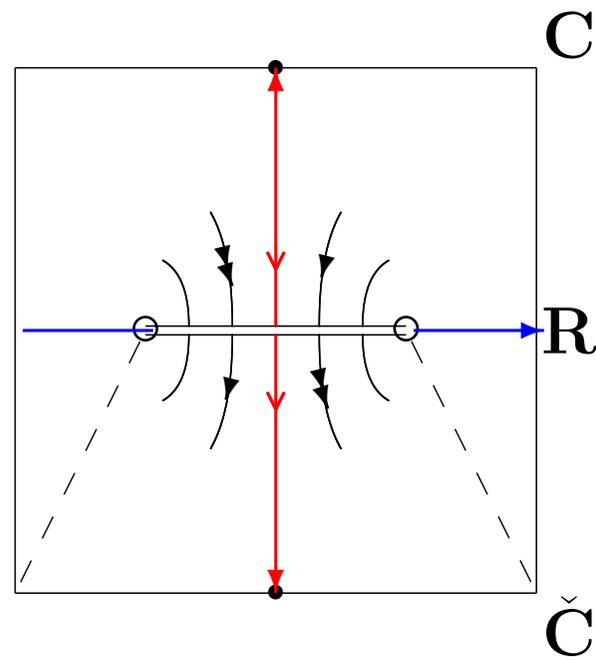
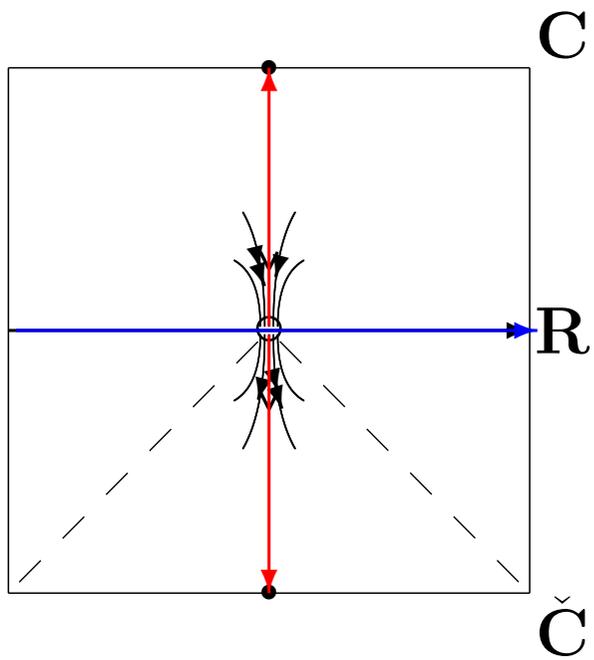
$$Y(u, \tau) = {}^t(u^3 + u^2\tau, u\tau, \tau)$$

16 混合型錘状特異点

本節の内容は、前節に引き続き、安藤氏、橋本氏、濱田氏との共同研究に基づくものである。

定理 15.2 で見たように、 $\mathbf{R}^{2,1}$ 内の混合型平均曲率 0 曲面は、光的「平面型」end が漸近する光的直線上の generic な点においては C^∞ 級であるが、一般には全ての点においてと言う訳ではない。実際、例えば end $z = 0$ で $g(0) = 0$ ($\check{z} = 0$ で $\check{g}(0) = 0$) とすると、特異点集合 $\{z \mid g(z) \in \mathbf{R}\}$ ($\{\check{z} \mid \check{g}(\check{z}) \in \mathbf{R}\}$) は、座標変換 $x = st^{K_0+1}$, $t = y^2$ ($t = -y^2$) ($s, t \in \mathbf{R}$) により明示される光的直線を、 $t = 0$ で通過するが、 $z = 0$ ($\check{z} = 0$) が g (\check{g}) の偶数位の零点ならば、その中程で横切り、奇数位の零点ならば、無限遠点 $(s, t) = (\pm\infty, 0)$ (§15 で扱った境目のことである) で横切る(かすめる?)ことになる。

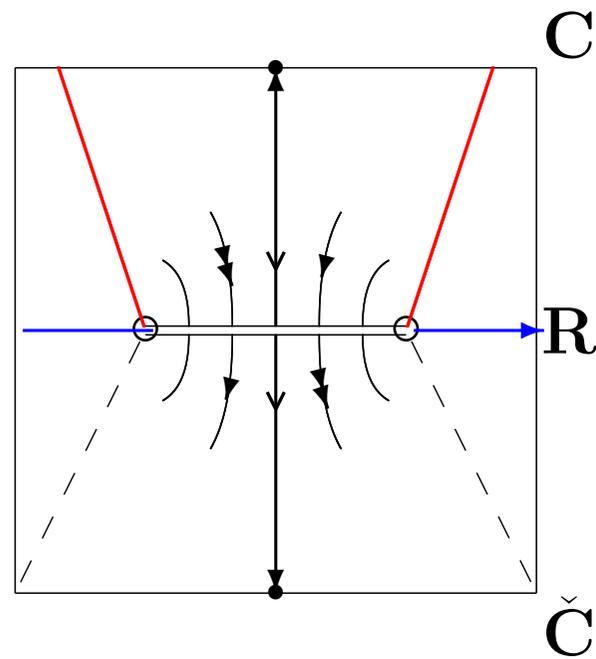
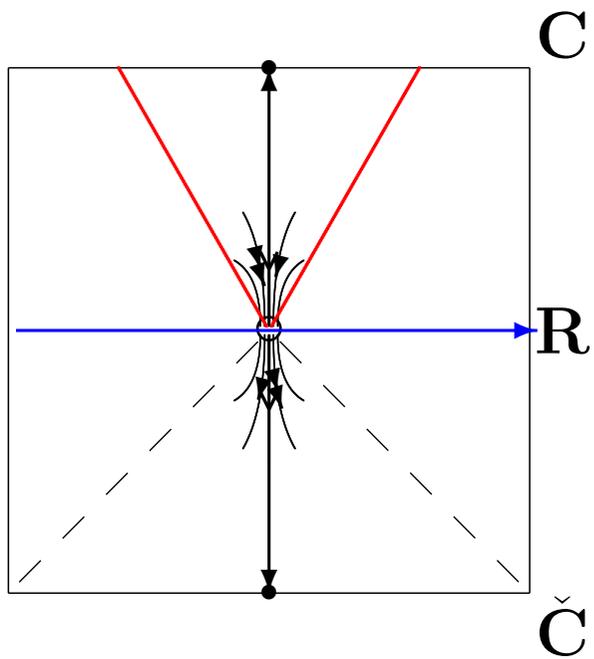




$$g = z^2, \check{g} = \check{z}^2$$

$$g \in \mathbf{R} \iff y = 0, x = 0$$

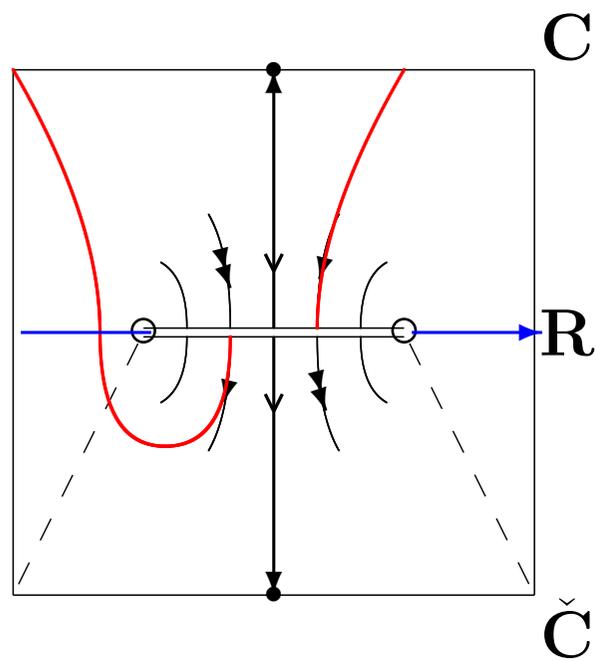
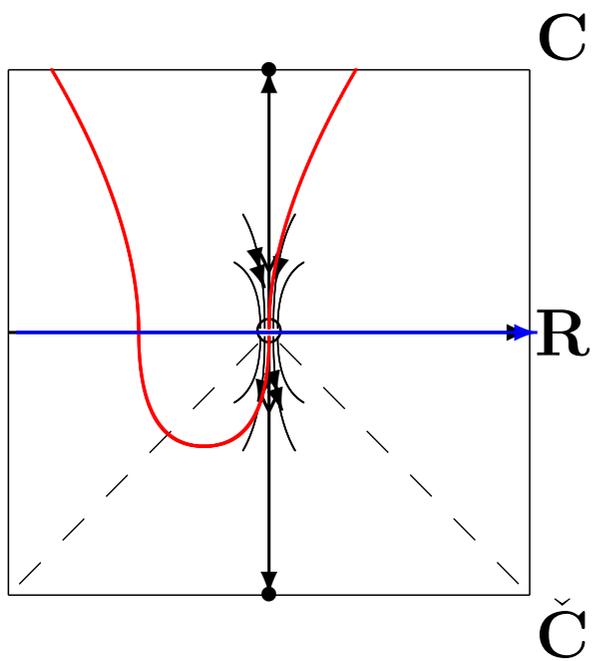
$$\check{g} \in \mathbf{R} \iff y = 0, x = 0$$



$$g = z^3, \check{g} = \check{z}^3$$

$$g \in \mathbf{R} \iff y = 0, y = \pm\sqrt{3}x$$

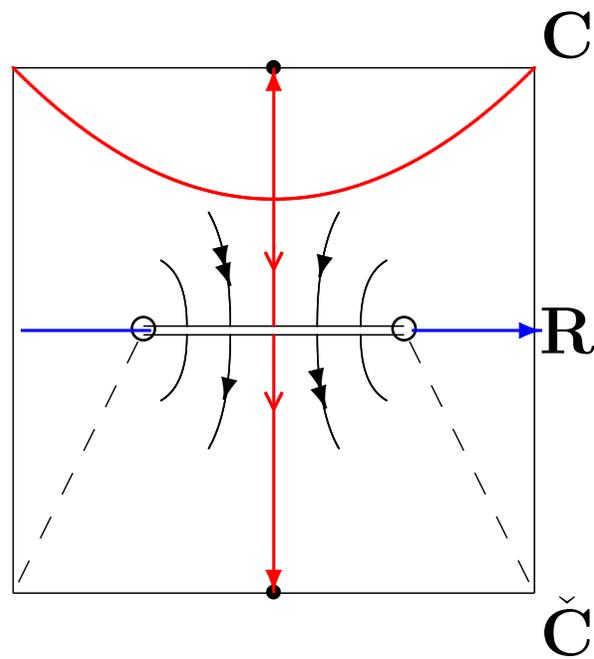
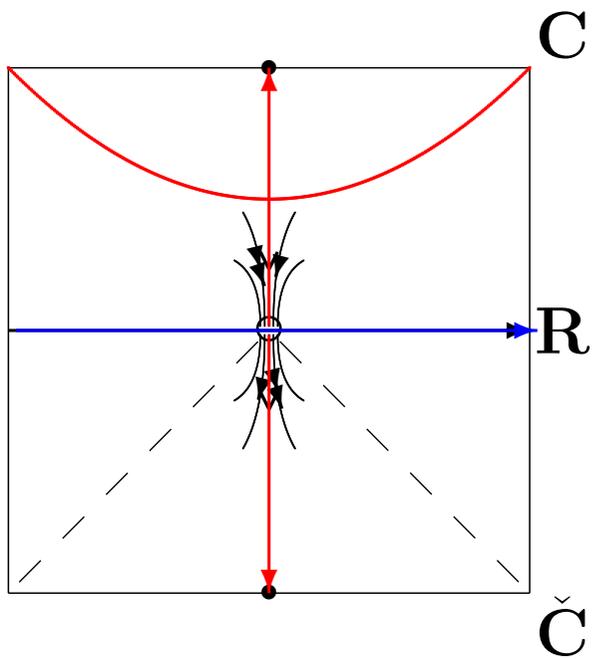
$$\check{g} \in \mathbf{R} \iff y = 0$$



$$g = z^2 + z^3, \quad \check{g} = \check{z}^2 + \check{z}^3$$

$$g \in \mathbf{R} \iff y = 0, \quad 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$$

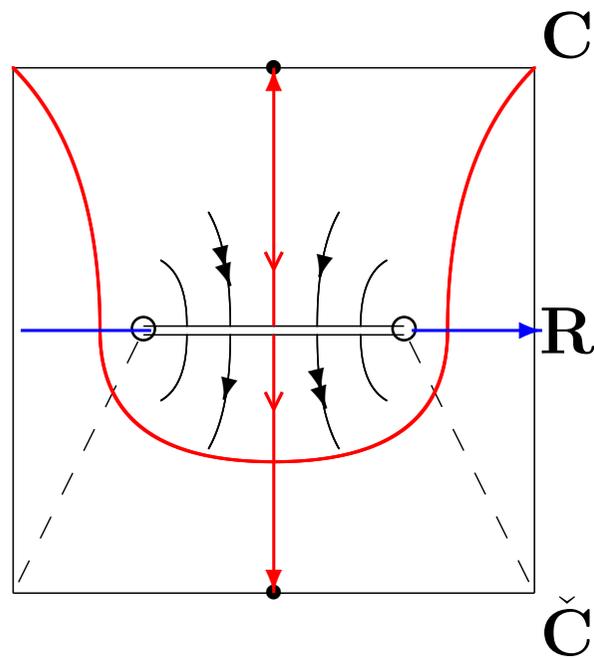
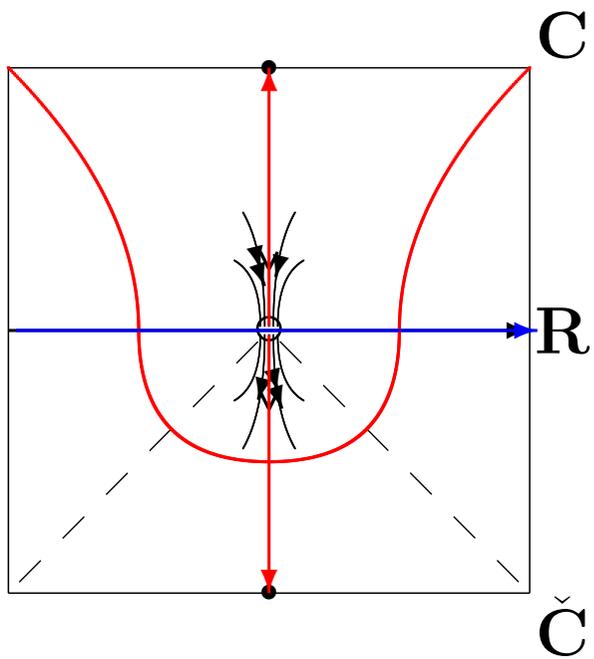
$$\check{g} \in \mathbf{R} \iff y = 0, \quad 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$



$$g = z^2 + z^4, \check{g} = \check{z}^2 + \check{z}^4$$

$$g \in \mathbf{R} \iff y = 0, x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\check{g} \in \mathbf{R} \iff y = 0$$



$$g = z^2 - z^4, \quad \check{g} = \check{z}^2 - \check{z}^4$$

$$g \in \mathbf{R} \iff y = 0, \quad x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\check{g} \in \mathbf{R} \iff y = 0, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

特に前者の場合、もし曲面自身が奇関数によって実現される(言い換えれば Weierstrass data が偶関数の組である)ならば、虚軸の像は一点集合となり、さらに追加の(と言っても極めて自然な)条件を満たせば、この一点の近傍で錘状特異点をなす。この事実を捉えるために、まず次の補題を用意する。

補題 **16.1.** $\epsilon > 0$, $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $U = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$ とし、

$X = (X_1, X_2, X_3) : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ は C^∞ 級写像とする。

$X_{12} := (X_1, X_2)$, $\Theta := \arg(X_1 + iX_2)$ とおく。次の条件を全て満たすとき、 X は $\{0\} \times S^1$ 上、錘状特異点を持つ。

(1) $X(0, [\theta]) = (0, 0, 0)$ ($\forall \theta$).

(2) X_{12} は $U \setminus (\{0\} \times S^1)$ 上、局所微分同相写像である。

(3) $|X_{12}|(\rho, [\theta])$ は $\rho \in [0, \epsilon)$ ($(-\epsilon, 0]$) 上 C^1 級で、

$|X_{12}|_\rho(0, [\theta]) > 0$ (< 0) ($\forall \theta$) を満たす。

(4) $\Theta : ((-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は $\{0\} \times \mathbf{R}$ に延長可能、

$\Theta(0, \theta)$ は θ に関して C^1 級で、さらに $\Theta_\theta(0, \theta) > 0$ (または < 0) ($\forall \theta$) かつ $\Theta(0, 2\pi) - \Theta(0, 0) = 2\pi$ (または -2π) を満たす。

(5) $X_3(\rho, [\theta])$ は ρ に関して C^1 級で、 $(X_3)_\rho(0, [\theta]) > 0$ (または < 0) ($\forall \theta$) を満たす。

(6) $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = o(X_1^2 + X_2^2)$.

この補題は型変化するしないを問わず、適用可能であるが、そのためには、いずれにせよ、錘状特異点を構成する次の各パーツ毎に、評価を用意する必要がある。

(1) \mathbf{C} の虚軸 $i\mathbf{R}$

(1') $\check{\mathbf{C}}$ の虚軸 $j\mathbf{R}$

(2) 折り目特異点と虚軸の交点

(3) $0 \in \mathbf{C}$ 上の光的直線と虚軸の交点

(3') $0 \in \check{\mathbf{C}}$ 上の光的直線と虚軸の交点

(4) 折り目特異点上の光的直線と虚軸の交点

多少面倒ではあるが、あくまで技術的な問題に過ぎないので、その具体的な計算は省略する。

さて、 Ω ($\check{\Omega}$) は、 \mathbf{C} の compact 化 $\overline{\mathbf{C}} = S^2$ ($\check{\mathbf{C}}$ の compact 化 $\overline{\check{\mathbf{C}}} = T^2$) 内における虚軸 $i\mathbf{R}$ ($j\mathbf{R}$) の近傍とする。 K_0, K_∞ は -1 以上の奇数とし、 (g, f) ((\check{g}, \check{f})) は有理型 (para 有理型) 関数の組で次の条件を満たすものとする。

(1) g は $\Omega \cap \mathbf{C}$ 上正則で、 $g(0) = 0$ であり、また ∞ では極を持つ。 $(\check{g}$ は $\check{\Omega} \cap \check{\mathbf{C}}$ 上 para 正則で、 $\check{g}(0) = 0$ であり、また ∞ では極を持つ。)

(2) f は $\Omega \cap \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上正則で、 0 で $K_0 + 1$ 位の零点を持ち、 $g^2 f dz$ が ∞ で $K_\infty + 1$ 位の極を持つ。 $(\check{f}$ は $\check{\Omega} \cap \check{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ 上 para 正則で、 0 で $K_0 + 1$ 位の零点を持ち、 $\check{g}^2 \check{f} d\check{z}$ が ∞ で $K_\infty + 1$ 位の極を持つ。

(ここで $-1 + 1$ 位の極は正則点を意味するものとする。)

このとき、型変化を許容する場合については、補題 16.1 より次を得る。

定理 **16.2.** (g, f) (\check{g}, \check{f}) は同上で、さらに

$$(16.1) \quad \begin{aligned} g(\bar{z}) &= \overline{g(z)}, & f(\bar{z}) &= \overline{f(z)} \\ (\check{g}(\bar{\check{z}}) &= \overline{\check{g}(\check{z})}, & \check{f}(\bar{\check{z}}) &= \overline{\check{f}(\check{z})}) \end{aligned}$$

及び

$$(16.2) \quad \begin{aligned} g(-\bar{z}) &= \overline{g(z)}, & f(-\bar{z}) &= \overline{f(z)} \\ (\check{g}(-\bar{\check{z}}) &= \overline{\check{g}(\check{z})}, & \check{f}(-\bar{\check{z}}) &= \overline{\check{f}(\check{z})}) \end{aligned}$$

を満たしかつ (g, f) と (\check{g}, \check{f}) は $\Omega \cap \mathbf{R} \cap \check{\Omega}$ 上一致するものとする。このとき、 $X(i\mathbf{R}) \cup \check{X}(j\mathbf{R})$ が錘状特異点をなすための条件は次の通りである。

$$g'(z) \neq 0, \quad f(z) \neq 0 \quad (z \in i\mathbf{R} \setminus \{0\}),$$

$$\check{g}'(\check{z}) \neq 0, \quad \check{f}(\check{z}) \neq 0 \quad (\check{z} \in j\mathbf{R} \setminus \{0\}),$$

$$g''(0) \neq 0, \quad \left. \frac{d^2}{dz^2} \right|_{z=0} \frac{1}{g(z^{-1})} \neq 0,$$

$$(K_0 + 1) + (K_\infty + 1) \equiv 2 \pmod{4}$$

型変化しない場合についても、やはり補題 16.1 より次を得る。

定理 16.3. (g, f) ((\check{g}, \check{f})) は同上で、さらに (16.2) を満たすものとする。このとき、 $X(i\mathbf{R})$ ($\check{X}(j\mathbf{R})$) が錘状特異点をなすための条件は次の通りである。

$$\begin{aligned}
 &g'(z) \neq 0, \quad f(z) \neq 0 \quad (z \in i\mathbf{R} \setminus \{0\}), \\
 &g'(0) \neq 0, \quad \left. \frac{d}{dz} \right|_{z=0} \frac{1}{g(z^{-1})} \neq 0, \\
 &(\check{g}'(\check{z}) \neq 0, \quad \check{f}(\check{z}) \neq 0 \quad (\check{z} \in j\mathbf{R} \setminus \{0\}), \\
 &\check{g}'(0) \neq 0, \quad \left. \frac{d}{d\check{z}} \right|_{\check{z}=0} \frac{1}{\check{g}(\check{z}^{-1})} \neq 0, \quad) \\
 &(K_0 + 1) + (K_\infty + 1) : \text{偶数}
 \end{aligned}$$

型変化しない場合については、既に多くの例が知られているようなので、ここでは混合型の例を紹介する。

例16.4. X と \check{X} は、次の Weierstrass data により与えられる平均曲率0曲面の対とする。

$$(g, f) = \left(-z^2, -\frac{1}{z^2} \right), \quad (\check{g}, \check{f}) = \left(-\check{z}^2, -\frac{1}{\check{z}^2} \right)$$

これらの曲面をつなぐことで得られる混合型曲面は、折り目特異点並びに光的直線の近傍ではそれぞれ次のように表される。

$$X_{\text{fld}}(x, t) = \left(\frac{x}{x^2 + t} + \frac{1}{3}(x^3 - 3xt), 2x, \frac{x}{x^2 + t} - \frac{1}{3}(x^3 - 3xt) \right),$$

$$X_{\text{fed}}(s, t) = \left(\frac{s}{s^2t + 1} + \frac{1}{3}(s^3t^3 - 3st^2), 2st, \frac{s}{s^2t + 1} - \frac{1}{3}(s^3t^3 - 3st^2) \right)$$

この曲面は2個の end を 0 と ∞ で持ち、end 0 は光的「平面型」end, end ∞ は位数 -3 の完備でない end である。その compact 化は2本の光的直線を含み、1点を除き C^∞ 級である (cf. 定理15.2)。また end 0 (∞) の 0 因子の像は \hat{L} 内で滑らか (cusp 辺) である (cf. 定理15.3)。さらに、end 0 の 0 因子と光的直線の境目は孤立特異点をなし (cf. §15.7)、一方、2本の光的直線の交点 (先程除いた1点のことであるが) において錘状特異点を持つ。実際、この曲面は、1点を除いて C^∞ 級である次の二つの関数の entire graph の対になっている。

$$X_3 = \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - \frac{1}{3}X_1X_2^3 + \frac{1}{36}X_2^6 - \frac{1}{6}X_2^3}$$



図 16.1 (a) 型変化する錘状特異点(end 2個)

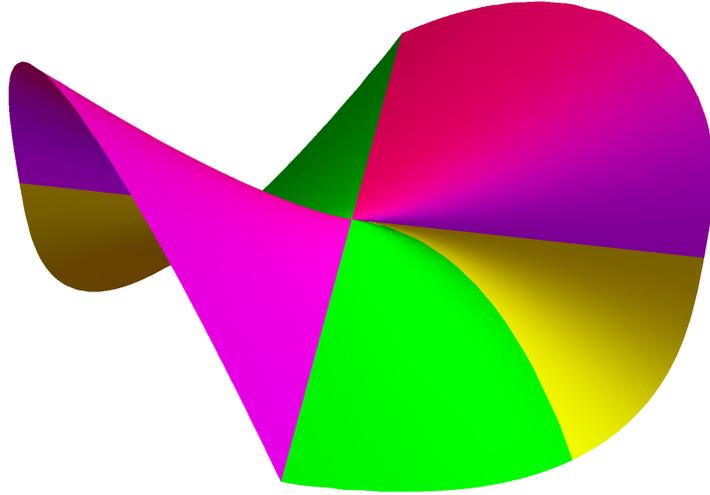


図 16.1 (b) 境目の孤立特異点

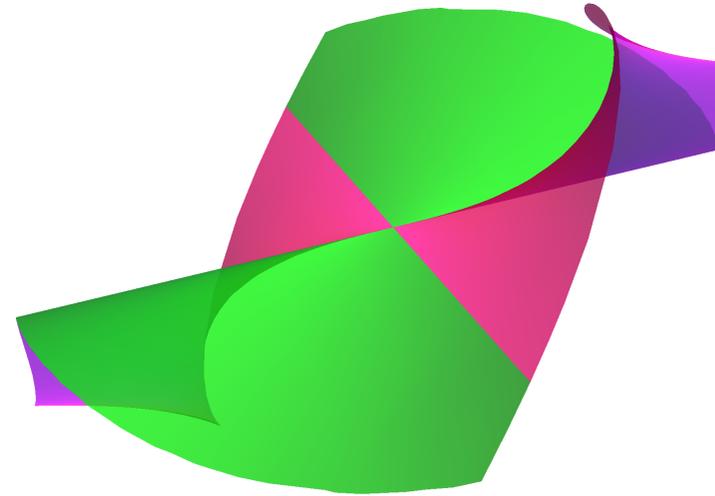
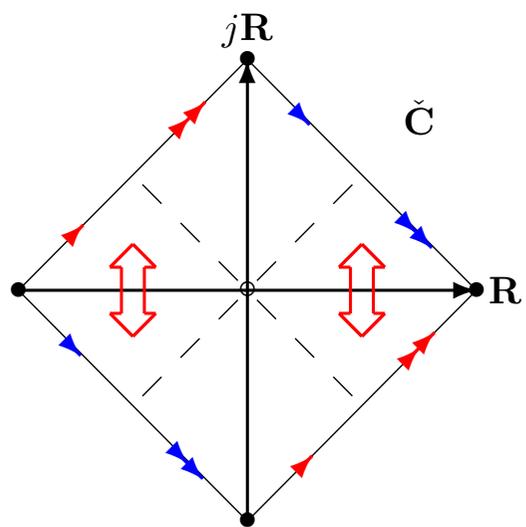
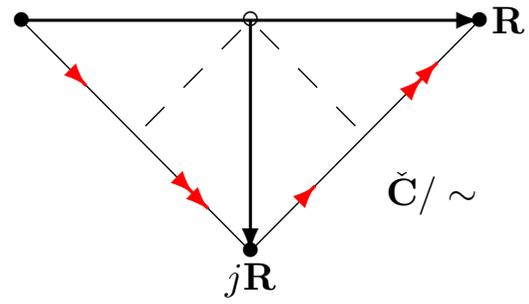
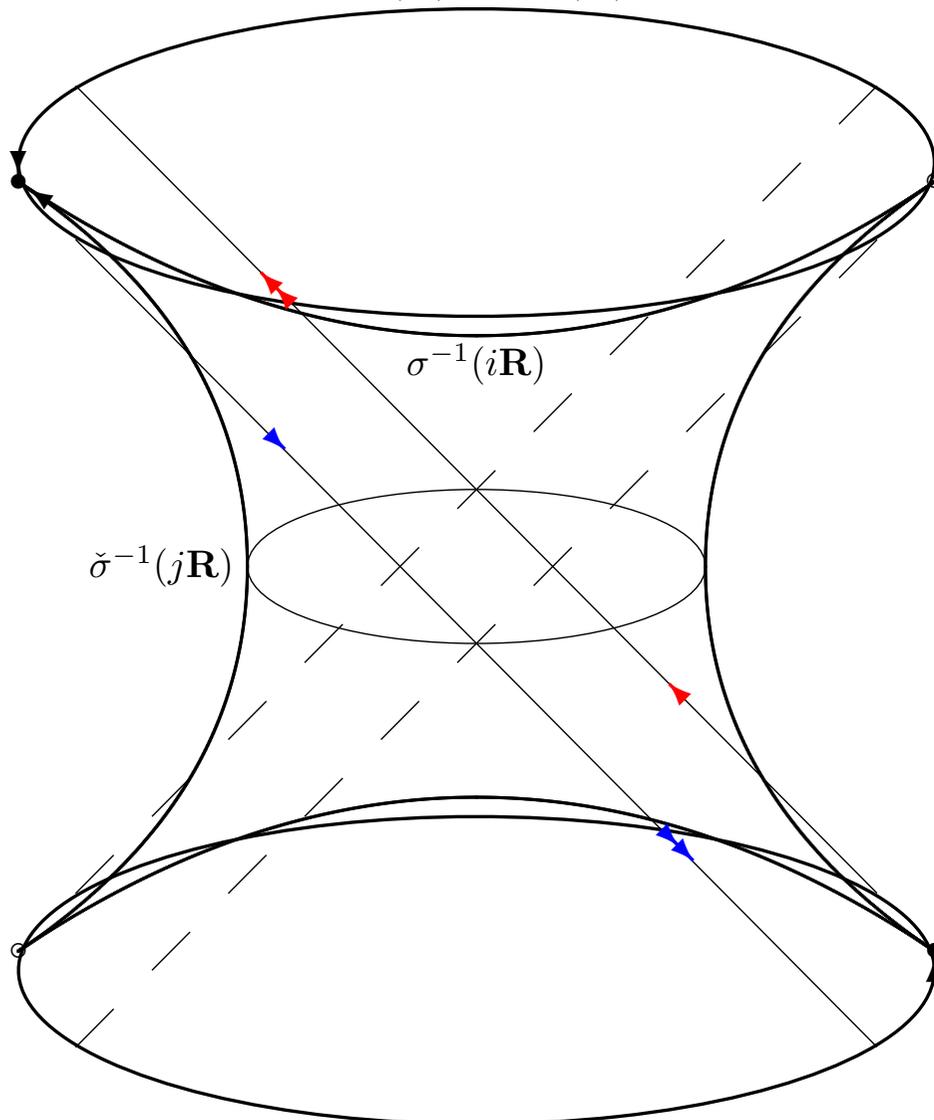


図 16.1 (c) 0 因子の交点



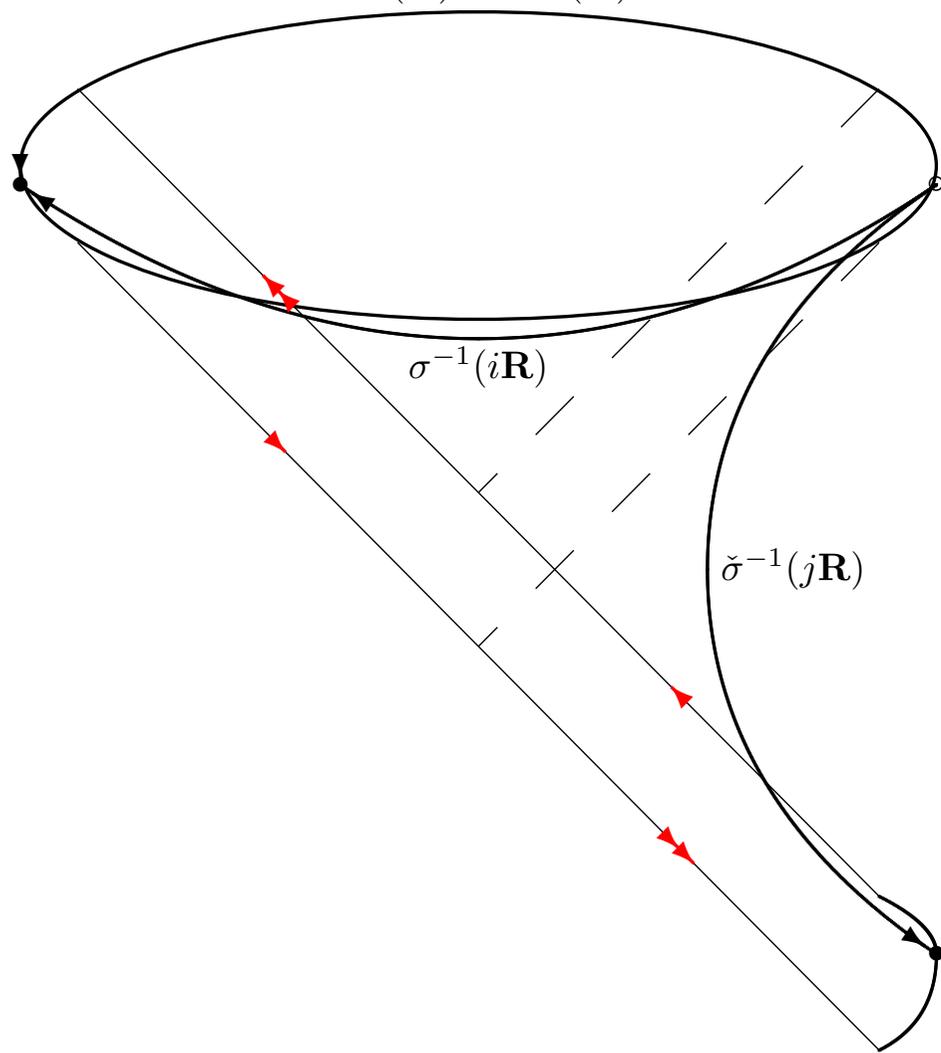


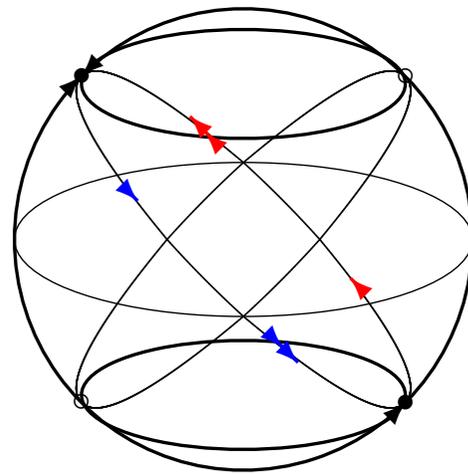
$$\sigma^{-1}(\mathbf{R}) = \check{\sigma}^{-1}(\mathbf{R})$$

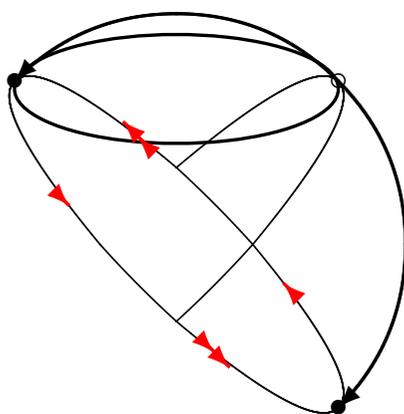


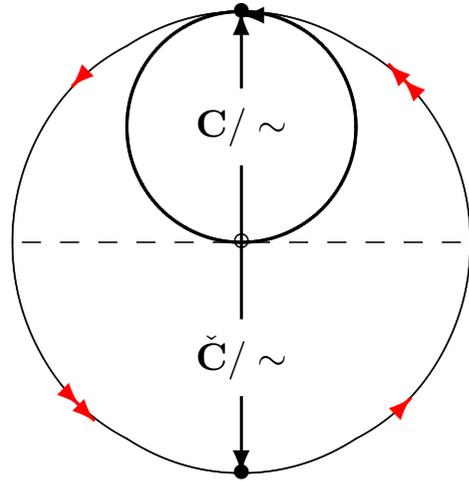
$$\sigma^{-1}(\mathbf{R}) = \check{\sigma}^{-1}(\mathbf{R})$$

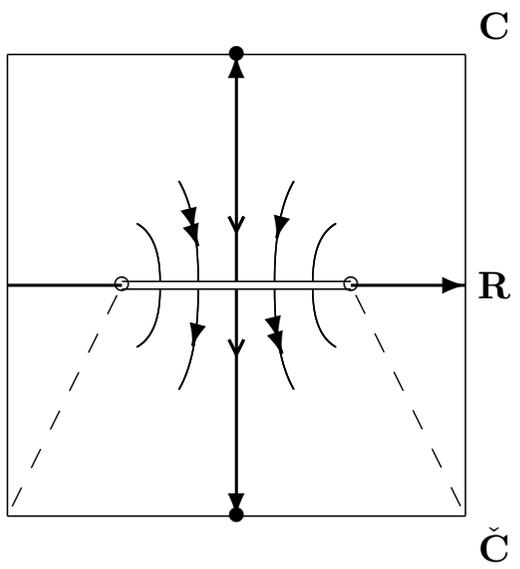
$$\sigma^{-1}(\mathbf{R}) = \check{\sigma}^{-1}(\mathbf{R})$$

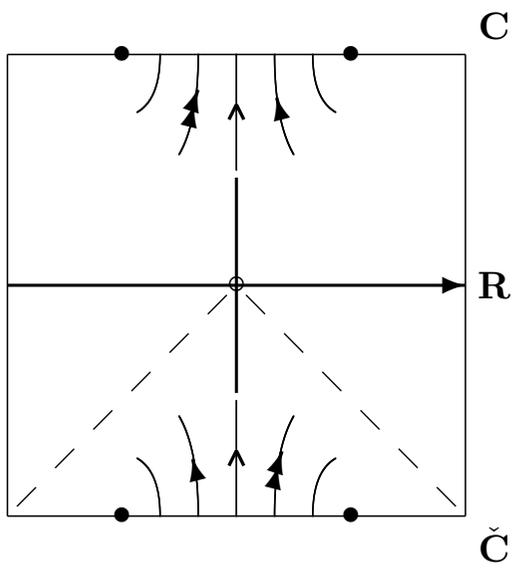


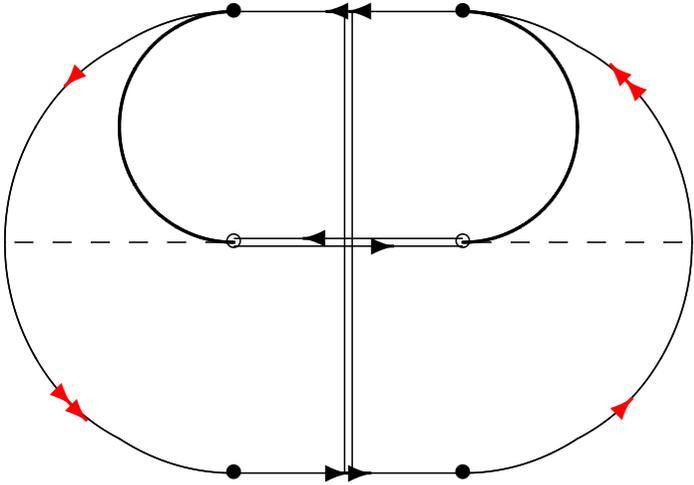












end 1 個の例もある。

例**16.5.** X と \check{X} は、次の Weierstrass data により与えられる平均曲率 0 曲面の対とする。

$$(g, f) = (z^2, 1), \quad (\check{g}, \check{f}) = (\check{z}^2, 1)$$

これらの曲面をつなぐことで得られる混合型曲面は、折り目特異点の近傍では次のように表される。

$$X_{\text{fld}}(x, t) = \left(x - \frac{1}{5}(x^5 - 10x^3t + 5xt^2), \frac{1}{3}(x^3 - 3xt), \right. \\ \left. x + \frac{1}{5}(x^5 - 10x^3t + 5xt^2) \right)$$

この曲面はただ1個の end を ∞ で持ち、この end は位数 -5 の完備でない end である。その compact 化は1本の光的直線を含み、1点を除き C^∞ 級である (cf. 定理15.2)。また、0因子の像は \hat{L} 内で滑らかでない。そして、今度は光的直線と折り目特異点をなす null 曲線の交点において錘状特異点を持つ。

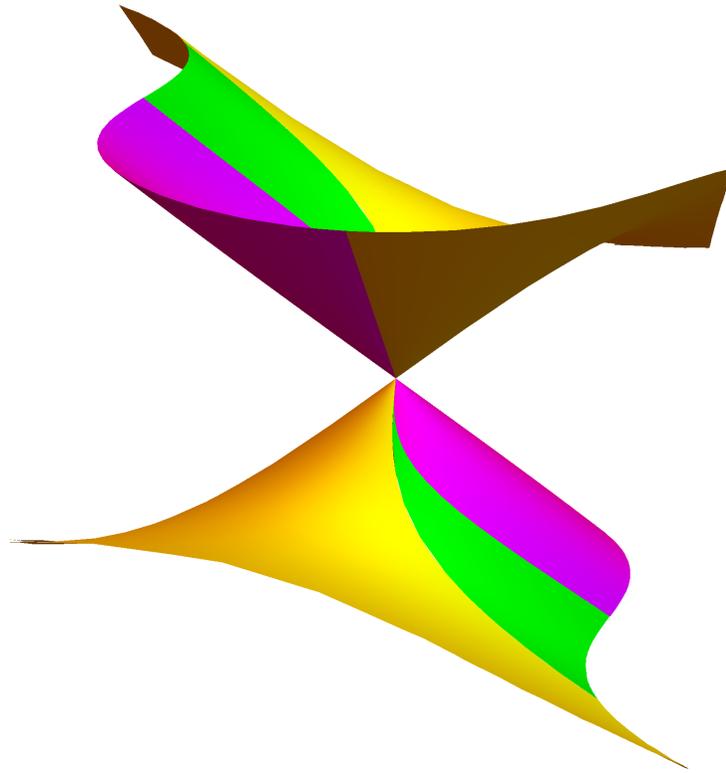


図 16.2 型変化する錘状特異点 (end 1 個)