大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2025年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門基礎科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門基礎分野の問題は，1ページ〜2ページにあります．
(2) 4題すべてに解答して下さい．
(3) 解答用紙は，8枚配付します．
(4) 解答は，問題ごとに2枚の解答用紙を用い，枠内に記入して下さい．解答用紙のすべてに，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全何枚中の何枚目かを記入して下さい．
(5) 試験時間は，9:30〜12:00です．
(6) 解答用紙は，白紙を含め，すべて提出して下さい．

専門基礎分野の問題（数学専攻）

次の数学 I-1 ～ 数学 I-4 の問題全てに解答せよ．

数学 I-1 s, t を 0 でない実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} s & t & t & t \\ t & s & t & t \\ t & t & s & t \\ t & t & t & s \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2s+3t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

とする．次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式を因数分解した形で求めよ．

(2) A が逆行列をもつための必要十分条件を s, t を用いて示せ．

(3) A の階数を求めよ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件を s, t を用いて示せ．

(5) (4) の条件をみたす A が正則でないとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ をすべて求めよ．

数学 I-2 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対して，$n-1$ 次以下の多項式 $P_{\boldsymbol{a}}(x)$ を

$$P_{\boldsymbol{a}}(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$$

と定め，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \int_0^1 P_{\boldsymbol{a}}(x) P_{\boldsymbol{b}}(x)\, dx$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $n = 3$ とし，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = {}^t(0, 0, 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) $n = 4$ とし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で生成される部分空間を W とする．ただし，$\boldsymbol{e}_i$ は第 i 成分のみ 1 で，その他の成分が 0 のベクトルである．部分空間 W' を

$$W' = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4 \mid \text{全ての } \boldsymbol{b} \in W \text{ について } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0\}$$

と定めるとき，W' の基底を一組求めよ．

(3) n を一般の正の整数とする．実数 r に対して，写像 $f_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f_r(\boldsymbol{a}) = P_{\boldsymbol{a}}(r)$ で定義する．このとき f_r は線形写像であることを示せ．

(4) $n = 4$ のとき，$\mathrm{Ker}\, f_0 \cap \mathrm{Ker}\, f_1$ の基底を一組求めよ．

$\boxed{\text{数学 I-3}}$ 次の各問いに答えよ．ただし $\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数の主値を表すものとする．

(1) 関数 $f(x) = (\sin^{-1} x)^2$ に対して，$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$ を示せ．

(2) 関数 $f(x) = (\sin^{-1} x)^2$ と正の整数 n に対して，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$ を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．

(4) $x > 0$ で微分可能な実数値関数 $g(x)$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = \alpha$ （α は有限値）ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x}$ が存在し，その極限値が α に等しいことをロピタルの定理を使わずに示せ．

$\boxed{\text{数学 I-4}}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 次の極限を求めよ．なお，以下の積分は逐次積分である．

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

(2) 次の極限を求めよ．なお，以下の積分は逐次積分である．

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

(3) $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ (x,y) \ne (0,0)\}$ とおく．広義の重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

は存在するかどうか，理由を付けて答えよ．

(4) θ を $0 < \theta \le \pi/2$ を満たす定数とし，$0 < \varepsilon < 1$ に対し $\Omega_\varepsilon(\theta)$ を

$$\Omega_\varepsilon(\theta) = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ (\tan\theta)x \ge y \ge 0,\ \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とおく．ただし，$\theta = \pi/2$ の場合は

$$\Omega_\varepsilon(\pi/2) = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とする．このとき，極限

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\Omega_\varepsilon(\theta)} f(x,y)\,dxdy$$

が存在するような θ を求めよ．