大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2025年度春入学 一般選抜
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門分野の問題は，1ページ～8ページにあります．

(2) 数学 II-1～数学 II-16 の問題の中から3題を選択して解答して下さい．

(3) 解答用紙は，6枚配付します．

(4) 解答は，問題ごとに2枚の解答用紙を用い，枠内に記入して下さい．解答用紙のすべてに，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全何枚中の何枚目かを記入して下さい．

(5) 試験時間は，13:00～15:30です．

(6) 解答用紙は，白紙を含め，すべて提出して下さい．

専門分野の問題（数学専攻）

　次の数学 II-1 ～数学 II-16 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ（4 題以上解答しないこと）．解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

$\boxed{\text{数学 II-1}}$ 4 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & 0 & -8 \\ -4 & -6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

(1) A の固有多項式と固有値を求めよ．

(2) A^{100} を求めよ．

(3) 4 次の正則行列 P で $J = P^{-1}AP$ が Jordan 標準形であるものを 1 つ与え，それに対する J を求めよ．

(4) すべての正の整数 n に対して，$\operatorname{rank} A^n$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-2}}$ 群 G に対して

$$Z(G) = \{g \in G \mid \text{すべての } h \in G \text{ に対して } gh = hg\}$$

とし，$g \in G$ に対して

$$Z_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}, \quad C(g) = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $Z(G)$ は G の正規部分群であることを示せ．

(2) $G/Z_G(g)$ から $C(g)$ への全単射 ϕ: $G/Z_G(g) \to C(g)$ を構成せよ．

(3) 元 $g \in G$ に対して，次の条件 (i), (ii), (iii) は同値であることを示せ：

(i) $g \in Z(G)$

(ii) $Z_G(g) = G$

(iii) $C(g) = \{g\}$

(4) 次の命題が正しいなら証明し, 正しくないならば反例を与えよ：
「任意の群 G に対して $Z(G/Z(G)) = \{e\}$ が成り立つ」

$\boxed{\text{数学 II-3}}$ R を可換環とする．R のイデアル I に対して，

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \text{ある正の整数 } n \text{ が存在して } a^n \in I\}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

(1) $\sqrt{I}$ が R のイデアルであることを示せ.

(2) P, Q が R の素イデアルならば，$\sqrt{P \cap Q} = P \cap Q$ であることを示せ.

(3) K を体とし，$R = K[x, y]$ を 2 変数多項式環とするとき，$\sqrt{Rx^2 + Rxy} = Rx$ を示せ.

(4) R を一般の一意分解整域（UFD）とし，$0 \neq a \in R$ とする．$\sqrt{Ra}$ が R の素イデアルならば，$a = up^r$ となるような正の整数 r, 単元 $u \in R$, 素元 $p \in R$ が存在することを示せ.

$\boxed{\text{数学 II-4}}$ 素数 p に対して，$\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる有限体とする．次の $\mathbb{F}_p$ 上の多項式

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad h(x) = x^4 + 1$$

を考える．K_f, K_g, K_h をそれぞれ $f(x), g(x), h(x)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の最小分解体とし，拡大次数を

$$d_f := [K_f : \mathbb{F}_p], \quad d_g := [K_g : \mathbb{F}_p], \quad d_h := [K_h : \mathbb{F}_p]$$

とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $p = 2$ のとき，d_f, d_g, d_h を求めよ．

(2) $p = 3$ のとき，d_f, d_g, d_h を求めよ．

(3) $d_f \neq 1$ かつ $d_g \neq 1$ となる素数 p を 1 つ求めよ．

(4) $d_f = d_g = d_h = 1$ となる最小の素数 p を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-5}}$ X を位相空間とする．任意のコンパクト Hausdorff 空間 K と連続写像 $f\colon K \to X$ に対して像 $f(K)$ が X の閉集合であるとき，X は弱 Hausdorff であるという．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 位相空間 X について，X は Hausdorff ならば弱 Hausdorff であることを示せ．

(2) 弱 Hausdorff 空間 X について，任意の $x \in X$ に対して一点集合 $\{x\}$ は X の閉集合であることを示せ．

(3) コンパクト Hausdorff 空間 K，弱 Hausdorff 空間 X とその間の連続写像 $f\colon K \to X$ について，像 $f(K)$ は Hausdorff 空間であることを示せ．必要ならばコンパクト Hausdorff 空間 K が正規空間であることは認めてよい．すなわち K の閉集合 A_1, A_2 で $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすものに対して，K の開集合 U_1, U_2 で $A_1 \subset U_1$, $A_2 \subset U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものが存在する．

(4) 位相空間 X_1, X_2 について，X_1, X_2 が弱 Hausdorff ならば積空間 $X_1 \times X_2$ は弱 Hausdorff であることを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-6}}$ 単位球面が互いに面積の等しい 48 個の凸な球面 n 角形に切り分けられているとする．ただし，n は 2 以上の整数である．次の各問いに答えよ．

(1) 各球面 n 角形の内角の和を求めよ．

(2) 隣接する球面 n 角形が辺を共有するように切り分けられていて，頂点の個数が 50 個であるとき，n を求めよ．ただし，異なる球面 n 角形が共有する頂点は，重複して数えないこととする．

$\boxed{\text{数学 II-7}}$ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ を考える．正の実数 a に対し，写像 $f_a \colon H \to H$ を $f_a(x, y) = (ax, ay)$ で定める．また，H 上のベクトル場 X，Y を次で定義する:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) H は自然に C^∞ 級多様体となる．その理由を簡潔に述べよ．

(2) 一般に M を C^∞ 級多様体，$f \colon M \to M$ を C^∞ 級写像とし，$p \in M$ とする．このとき M の p における接空間 T_pM と，微分写像 $(df)_p \colon T_pM \to T_{f(p)}M$ の定義を述べよ．

(3) すべての $p \in H$ に対して $(df_a)_p(X_p) = X_{f_a(p)}$ が成立することを示せ．

(4) ベクトル場の括弧積 $[X, Y]$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-8}}$ 非負整数 n に対し，$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ と定める．次の各問いに答えよ．

(1) $X = S^1 \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, |y| \leq 1\}$ とする．単体的複体 K でその多面体 $|K|$ が X と同相であるものを 1 つ与えよ．なお，$|K|$ と X が同相であることの証明は述べなくともよい.

(2) (1) で与えた単体的複体 K の整係数ホモロジー群 $H_d(K)$ $(d \in \mathbb{Z})$ を求めよ.

(3) $Y = S^2 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0, |z| \leq 1\}$ とする．単体的複体 L であってその多面体 $|L|$ が Y と同相であるものを 1 つ与え，さらにその Euler 標数 $\chi(L)$ を求めよ．なお，$|L|$ と Y が同相であることの証明は述べなくともよい.

$\boxed{\text{数学 II-9}}$ I を閉区間 $[0,1]$ とする．各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $J(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I\}$ とおき，さらに座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間 X を

$$X = \{(x,0) \mid x \in I\} \cup J(0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} J(1/n)$$

により定義する．X 上の恒等写像を $\iota : X \to X$ とし，$a = (0,1) \in X$ とする．また $\lambda \colon X \to X$ を a に値をとる定値写像とする．次の問いに答えよ．

(1) $\iota \colon X \to X$ は $\lambda \colon X \to X$ にホモトピックであることを示せ．

(2) 基本群 $\pi_1(X,a)$ を求めよ．

(3) $\iota \colon X \to X$ から $\lambda \colon X \to X$ へのホモトピー $H \colon X \times I \to X$ で，任意の $s \in I$ に対して $H(a,s) = a$ を満たすものは存在しないことを示せ．

$\boxed{\text{数学 II-10}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) ある正の実数 C と $0 < \delta < 1$ が存在して，$|x| \leq \delta$ を満たす任意の実数 x に対して

$$|\log(1+x) - x| \leq Cx^2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 実数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \alpha > 0$ を満たすとする．非負の整数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

の値を k と α の式で表せ．

(3) (2) で求めた値を q_k とするとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kq_k$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q_k$ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-11}}$ 実数 $R > 2$ に対して 積分路 γ_R を

$$\gamma_R : z = Re^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により定める (i は虚数単位)．

(1) 極限

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+4}\, dz$$

の値を求めよ．

(2) 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx$$

の値を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-12}}$ $X = L^2(-\pi, \pi)$ を内積 $(x, y) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(\theta)y(\theta)d\theta$ を備えた実 Hilbert 空間とする．次の各問いに答えよ．

(1) 定数 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ により $x(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta$ と定める．a_0, a_1 を関数 $x(\theta)$ と内積 $(\cdot\,,\cdot)$ を用いて表せ．

(2) $L = \{x \in X \mid x(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ が X の閉部分空間であることを示せ．

(3) X の L への直交射影 P_L を求めよ．

$\boxed{\text{数学 II-13}}$ 次の各問いに答えよ．ただし，関数 $x(t)$ に対して，$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とする．

(1) $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ とおくことにより，初期値問題 $x' = \dfrac{x}{x-t},\ x(1) = 3$ の解を求めよ．

(2) 連立微分方程式 $x' = -2x + y,\ y' = -5x - 4y$ の一般解を求めよ．

(3) 連立微分方程式 $x' = a - 2xz - x,\ y' = 2xz - 2y,\ z' = y - z$ の平衡点を求め，その安定性を調べよ．ただし，a は正の定数である．

$\boxed{\text{数学 II-14}}$ $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の可測関数列 f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\sup_{n \geq 1} \int_{\{x \in X\,;\,|f_n(x)| > t\}} |f_n(x)|\, d\mu(x) \right) = 0 \qquad (*)$$

を満たすとき「$\{f_n\}_{n \geq 1}$ は条件 $(*)$ を満たす」ということにする．次の各問いに答えよ．

(1) 条件 $(*)$ を満たす X 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ について，次の主張を示せ：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$\mu(A) < \delta$ なる任意の $A \in \mathfrak{M}$ に対して

$$\sup_{n \geq 1} \int_A |f_n(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon$$

が成り立つ．

(2) $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は $\mu(A_n) = 1/n$ かつ $A_n \supset A_{n+1}$ を満たすとする．実数のパラメーター κ を含む X 上の可測関数列 $\{g_n\}_{n \geq 1}$ を $g_n(x) = n^{\kappa} \mathbf{1}_{A_n}(x)$ によって定めるとき，$\{g_n\}_{n \geq 1}$ が条件 $(*)$ を満たすための κ の条件を求めよ．ただし, 集合 S に対して $\mathbf{1}_S(x)$ は，$x \in S$ のとき 1，$x \notin S$ のとき 0 となる関数を表す．

$\boxed{\text{数学 II-15}}$ U, V, X, Y, Y_n $(n \in \mathbb{N})$, Z を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上で定義された確率変数とする．なお，確率変数 U の期待値，分散をそれぞれ $\mathsf{E}[U]$, $\mathsf{Var}[U]$ により表し，事象 $\{\omega \in \Omega : U(\omega) \geq r\}$ $(r \in \mathbb{R})$ の確率を $\mathsf{Pr}(U \geq r)$ と書くことにする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $s, t \in \mathbb{R}$, $0 < s < t$ とする．U の t 次絶対積率 $\mathsf{E}[|U|^t]$ が存在するならば，U の s 次絶対積率 $\mathsf{E}[|U|^s]$ も存在することを示せ．

(2) V を期待値が存在する非負値確率変数とする．すなわち，$\mathsf{E}[V] < \infty$ かつ $\mathsf{Pr}(V \geq 0) = 1$ である．このとき，任意の $r > 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\mathsf{Pr}(V \geq r) \leq \frac{\mathsf{E}[V]}{r}.$$

(3) X の 2 次積率 $\mathsf{E}[X^2]$ が存在するとする．このとき，任意の $r > 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\mathsf{Pr}(|X - \mathsf{E}[X]| \geq r) \leq \frac{\mathsf{Var}[X]}{r^2}.$$

(4) $\mathsf{E}[|Y|] < \infty$, $\mathsf{E}[|Y_n|] < \infty\,(n \in \mathbb{N})$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[|Y_n - Y|] = 0$$

を満たすとき，確率変数列 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は確率変数 Y に確率収束することを示せ．ただし，$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Y に確率収束するとは，任意の $r > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|Y_n - Y\bigr| > r\bigr) = 0$$

となることである．

(5) Z を非負整数値確率変数とし，$0 < \mathsf{E}[Z^2] < \infty$ を満たすものとする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\mathsf{Pr}\bigl(Z = 0\bigr) + 1 \le \frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\bigl\{\mathsf{E}[Z]\bigr\}^2}.$$

$\boxed{\text{数学 II-16}}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上で定義された確率変数 X は連続な累積分布関数 F をもつとする．ただし，累積分布関数 F は $F(x) = \mathsf{Pr}(X \le x)$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める．正の定数 θ と狭義単調かつ非負値連続な関数 g に対して，確率変数 U を次のように定める：

$$U = \begin{cases} 1 & (g(X) > \theta), \\ 0 & (g(X) \le \theta). \end{cases}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．なお，事象 $\{\omega \in \Omega :\ X(\omega) > r\}$ $(r \in \mathbb{R})$ の確率を $\mathsf{Pr}(X > r)$ と書くことにする．

(1) U の期待値 $\mathsf{E}[U]$ を g の逆関数 g^{-1}, F および θ を用いて表せ．

(2) U の分散 $\mathsf{Var}[U]$ を g の逆関数 g^{-1}, F および θ を用いて表せ．

(3) $\mathsf{Pr}\bigl(\theta U > g(X)\bigr) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \in \mathbb{N})$ を確率分布

$$\mathsf{Pr}(X_1 = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & (x = 1, 2, \ldots), \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

に互いに独立に従う確率変数列とする．確率変数 $U_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$U_j = \begin{cases} 1 & (X_j < 2), \\ 0 & (X_j \ge 2) \end{cases}$$

で定める．このとき，$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ の確率分布と $n^{-1}S_n$ の分散 $\mathsf{Var}\bigl[n^{-1}S_n\bigr]$ を求めよ．