

大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2025 年度春入学 一般選抜 第2次募集
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

1. 数学専攻の専門科目の問題は，1 ページ ～ 4 ページにあります．
2. 数学 1～数学 4 の問題の中から2 題を選択して解答して下さい．3 題以上を選択しないで下さい．
3. 解答用紙は，6 枚配付します．
4. 解答は，問題ごとに 3 枚の解答用紙を用い，解答欄の枠内に記入して下さい．すべての解答用紙に受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全 3 枚中の何枚目かを記入して下さい．
5. 試験時間は，9:30 ～ 12:00 です．
6. 解答用紙は，解答欄が白紙のものを含め，すべて提出して下さい．
7. 本試験問題の一部あるいは全部について，いかなる方法においても複写・複製など，著作権法上で規定された権利を侵害する行為を行うことは禁じられています．

専門科目の問題（数学専攻）

次の「数学 1」～「数学 4」の問題の中から 2 題を選択して解答せよ。3 題以上を選択してはならない。解答用紙に問題の番号を書き忘れないように注意せよ。

「数学 1」 次の各問いに答えよ。

(1) 実数 c に対して

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ c & -1 & -1 \\ -2c & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき、以下の問いに答えよ。

(i) A の固有値を求めよ。

(ii) A は対角化可能かどうか調べよ。もし対角化可能ならば対角化せよ。

(2) 実数 a, b, c と非負整数 k について $v_k := \begin{pmatrix} a^k \\ b^k \\ c^k \end{pmatrix}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(i) v_0, v_1, v_2 が一次独立になる必要十分条件を、 a, b, c の条件として与えよ。

(ii) (i) の条件のもとで、任意の実数 α, β, γ に対し $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma$ となる二次以下の多項式 $f(t)$ が唯一つ存在することを示せ。

(iii) (i) の条件のもとで v_3 と v_4 を、それぞれ v_0, v_1, v_2 の一次結合として表せ。

数学 2 次の各問いに答えよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ とする. 次の広義重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{|y| dx dy}{(x^2 + y^2) \sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ とし, D 上の実数値関数 f を

$$f(x, y) = x^y \quad ((x, y) \in D)$$

によって定める.

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して $\lim_{r \rightarrow +0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ が存在し, その値は θ に依らないことを示せ.

(ii) (i) の極限値を c とする. D 内の点列 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = (0, 0) \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b_n) \neq c$$

を満たすものの例を作れ.

(3) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\phi_n(x) = \frac{n}{1 + (n\pi x)^2} \quad (x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots)$$

によって定める.

(i) 任意の自然数 n について $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) dx = 1$ を示せ.

(ii) 任意の正の実数 δ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \phi_n(x) dx = 1$ を示せ.

(iii) $\mathbb{R}$ 上の一様連続かつ有界な実数値関数 f に対して関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(y) f(x - y) dy \quad (x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots)$$

によって定めるとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

数学 3 X は位相空間, $\mathcal{A}$ は X の閉集合系とする. X の部分集合族 $k(\mathcal{A})$ を

$k(\mathcal{A}) = \{A \subset X \mid X \text{ の空でない任意のコンパクト部分集合 } K \text{ に対して } K \cap A \text{ は } K \text{ の閉集合}\}$

と定める. 次の問いに答えよ.

- (1) $k(\mathcal{A})$ は閉集合系の公理を満たすことを示せ.
- (2) X が局所コンパクトハウスドルフ空間ならば, $k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ が成り立つことを示せ.
- (3) Y は位相空間, $f: Y \rightarrow X$ は連続写像で, X の任意のコンパクト部分集合 K に対して逆像 $f^{-1}(K)$ がコンパクトであるとする. X が局所コンパクトハウスドルフ空間ならば, f は閉写像であることを示せ.

数学 4 $\{X_n\}_{n=1}^\infty, \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上で定義された確率変数列とし, X, Y を同じ確率空間上で定義された確率変数とする. 以下では, 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が確率変数 X に確率収束するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

が成立することをいう. 次の各問いに答えよ.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\Pr(|X_1 + X_2| > \epsilon) \leq \Pr\left(|X_1| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \Pr\left(|X_2| > \frac{\epsilon}{2}\right)$$

を示せ.

(2) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ が確率変数 X と Y にそれぞれ確率収束するならば, 確率変数列 $\{X_n + Y_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 $X + Y$ に確率収束することを示せ.

(3) 次の 2 条件 (a) と (b) は同値であることを証明せよ.

(a) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は 0 に確率収束する.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right] = 0$ である.