平成 20 年度 修士論文

カオス時系列からの
不安定周期軌道の検出

大阪府立大学大学院　工学研究科
電子・数物系専攻　数理工学分野
数理物理講座　非線形力学研究グループ

学籍番号　2070103042
森田　泰章

2009 年 2 月

目次

第 1 章

はじめに

自然界に存在するどんな系であれ、多かれ少なかれ非線形性を持っていると考えられている。そして、系に内在する非線形性の結果、カオス振動、分岐、自己組織化、フラクタルといった、様々な興味深い現象が起こる。

これは私見であるが、非線形現象の本質は非平衡開放系であるという事である。すなわち、我々の対象とするものは決して閉じられた系では無い。そこには必ず「外部からの力」が存在する。それを理解するために必要な事は、未知の世界に踏み込もうとする挑戦の意思ではないだろうか。思えば、人生とて似たようなものであり、ある一定の結論を出したとしても、それで終わりという事はない。常にその先があり、だからこそ我々は未来を感じる。現状に甘んじる事なく、常に外側・未知の領域を切り開こうする。そうした立場が未来を切り開くのではないだろうか。

力学系における不安定周期軌道とは、ある時間経過すると元の状態へ戻るという周期性を持ち、また、微小な摂動によって系の状態がそこから遠ざかっていく軌道である。不安定周期軌道に関する研究は、非線形科学における重要なテーマの一つになっており、例えば大自由度カオスの統計的性質が不安定周期軌道から得られるという報告 [6] がある。また、 UPO の安定化によるカオス制御に関する研究も盛んで、実用的なカオス制御法として Pyragas による遅延フィードバック法が注目されている [1]。しかし、シミュレーションや実験で不安定周期軌道を発見する事は、軌道の持つ不安定性のため、それほど容易ではない。特に、未知の力学系を UPO によって特徴付けるという観点に立てば、力学系そのものではなく、時系列を解析する必要がある。この問題に関して、 Lathrop らによる研究がある [7]。 Lathrop らは実験で得られた時系列からアトラクタを再構成し、統計的に不安定周期軌道を検出する

手法を提案した。本論文ではLathropらの研究を推し進め、時系列から不安定周期軌道を検出し、力学系の持つ性質を明らかにするため、カオス的な時系列データから軌道への「巻き付き」を捉え、不安定周期軌道を検出する手法（スキュタレ法）を提案する。また、いくつかの常微分方程式系に適用する事により、スキュタレ法の特徴、および長所、問題点などを詳しく解析する。さらに、そこから派生した発展的な研究についても述べる。

第2章ではスキュタレ法の一般的な方法について、第3章では常微分方程式で表されるレスラーモデル、ローレンツモデルの二つの系に対するスキュタレ法の適用結果、第4章ではスキュタレ法の諸性質、第5章ではスキュタレ法の対称性に持つ解の検出への一般化、第6章では本研究のまとめと今後の課題について述べる。

第 2 章

スキュタレ法の方法論

2.1 カオスとカオスに埋め込まれた不安定周期軌道

一般に連続力学系は、状態変数 $\boldsymbol{x}$ と時間 t を用いて次の形式で表される。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.1}$$

この時、軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ がカオスであるとは、研究者によって定義は様々であるが、ここでは、非周期的で最大リヤプノフ指数が正である事がカオスの条件であるという見解をとる。次に、不安定周期軌道とは

$$\boldsymbol{x}(t-\tau) = \boldsymbol{x}(t), \tag{2.2}$$

を満たす式 (2.1) の持つ不安定な（微小な摂動に対し解軌道が時間と共に離れていく）解である。不安定周期軌道は英語では Unstable Periodic Orbit と呼ばれ、しばしば、その頭文字をとって UPO と表記される。本論文では以後、不安定周期軌道を UPO と表記する。ここで τ は UPO の周期であり、 UPO を特徴付ける重要な時間スケールの一つである。カオスアトラクターには UPO が加算無限個埋め込まれている事が知られており、それら UPO はカオスを特徴付ける重要な軌道となる。

2.2 スキュタレ法

さて、カオス時系列から UPO （不安定周期軌道）を抽出するにあたり、まず、我々はカオス系に埋め込まれた双曲型 UPO に着目する。双曲型 UPO の接空間は不安定

多様体と安定多様体の両方を持っている。状態が安定多様体上にあれば、時間と共に状態はUPOに近づいてゆく。そして、状態が僅かにでも安定多様体上から外れていれば、UPOの不安定性により、状態は指数関数的にUPOから離れてゆく。カオスアトラクターを持つ系では、軌道は有限の領域に留まり、十分に観測時間を取れば、状態は安定多様体に近づく事ができると考えられる。さらに安定多様体近傍にある状態はUPOの近傍を通る事が期待される。

ここでは、周期 τ をもつUPO U_τ に対し、軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ が U_τ の周期 τ と同程度もしくはそれ以上の時間、U_τ の近傍にとどまる事を、軌道 x の U_τ への巻き付き と表現する。我々はこの巻き付きを捉えるため、以下の手続きを提案する。まず同一軌道上で時間差 s を持つ二点間の相空間上の距離 D を導入する。

$$D(t,s) \equiv \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-s)\|. \tag{2.3}$$

ここで $\|\cdot\|$ はなんらかのノルムである。本研究ではユークリッドノルムを採用する。

UPOの周期的性質 (2.2) と系の連続性を考えると、巻き付きの起こっている時刻 t では

$$D(t,\tau) \ll 1, \tag{2.4}$$

となる。さらに、UPOの周期である τ を見積もるため、次の量を導入する。

$$D_{\min}(s) \equiv \min_{s<t<T} D(t,s). \tag{2.5}$$

ここで T は時系列における全観測時間である。

観測において周期 s_1 を持つUPOに巻き付くとき、$D_{\min}(s_1)$ は0に近い値を取ると期待される。また、s_2 に対応する周期を持つUPOが存在しない、または存在したとしても巻き付きが起こらなかったとき $D_{\min}(s_2)$ は $D_{\min}(s_1)$ に比べ大きくなると考えられる。したがって、s を連続的に変えた時、$s = s_1$ で極小値を持つ事が期待される。我々はこれを $D_{\min}(s)$ の谷構造と呼ぶ事にする。そして $D_{\min}(s)$ の極小値（谷）を与える $s = s^*$ をUPOの周期の候補とし、さらに谷を与えた時刻 $t = t^*$ を用い、

$$\boldsymbol{x}(t) : t^* - s^* < t < t^*, \tag{2.6}$$

をUPOの近似軌道と考える。

以上のUPO抽出方法をまとめると以下の一連の手続きとなる。

1. 時系列から $D(t,s)$ を計算する。

2. $D(t, s)$ の最小値 $D_{\min}(s)$ を計算する。

3. $D_{\min}(s)$ の極小値を与える s^* を求める。

4. $D(t, s^*) = D_{\min}(s^*)$ を与える時刻 t^* を求める。

5. 時系列データから軌道断片 $\boldsymbol{x}(t) : t^* - s^* < t < t^*$ を抽出する。

以上の手続きをスキュタレ法と呼ぶ。スキュタレの名前の由来については付録 A に書く。この方法で時系列から UPO を近似的に抜き出す事が可能であると考えた。

後に述べるように、 $D_{\min}(s)$ で見られる谷構造は UPO や不安定固定点の特性乗数といった軌道の持つ特徴量を反映しており、そこから得られる情報は多い。また、我々の方法は対称性を考慮した方法へと容易に拡張する事ができる。

我々と Lathrop らの研究の大きな違いは、 $D_{\min}(s)$ という量を取ったという点、また、それによって得られる谷構造に対し解析を行った点、さらに、対称性を考慮した方法へと拡張した点である。

以下の章ではこの方法を微分方程式から作り出されるデータに対して適用した。

第 3 章

スキュタレ法の適用

3.1　数値計算のセットアップ

２章で述べたスキュタレ法を実際の時系列に適用するにあたって用いた実験方法について記す。まず時系列データを得るためにモデルの方程式を数値計算によって解き、得られたデータに対しスキュタレ法のアルゴリズムを適用する事を考える。数値計算においては、各変数には倍精度浮動小数点数を用い、４次のルンゲクッタ法によって一定の時間間隔 Δt によって離散化された時系列 $\boldsymbol{x}(i\Delta t)1 \leq i \leq N$ を作成した。また、時間間隔 Δt、データ数 N は対象とするモデルの特性に合わせて変更する。

スキュタレ法の適用の際は、時間差 s を Δs で離散化し、任意の自然数 m を用いて、 $\Delta s = m\Delta i$ とし、

$$D(i\Delta t, j\Delta s) = \|\boldsymbol{x}(i\Delta t) - \boldsymbol{x}(i\Delta t - j\Delta s)\|, (i = 1, 2, ...N), \tag{3.1}$$

とする。ここで j の範囲は探索を行いたい s の範囲によって決定する。

$$D_{\min}(j\Delta s) = \min_i D(i\Delta t, j\Delta s), \tag{3.2}$$

として計算する。

3.2　レスラーモデル

チュービンゲン大学のレスラー (O. E. Rössler) によって提案された [11] レスラーモデルは、カオス現象が見られる比較的簡単な３次元連続力学系であり、以下の非

線形微分方程式で表される。

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \tag{3.3}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \alpha y, \tag{3.4}$$
$$\frac{dz}{dt} = \beta + z(x - \mu). \tag{3.5}$$

ここで我々は各パラメータを $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \mu = 5.7$ とした。レスラーモデルではこのパラメータの時、カオス軌道が現れる事が知られている。その典型的な軌道を平面 $z = 0$ へ射影したものを図 3.1に示す。時間間隔を $\Delta t = 0.01$ として作成された $N = 10000$ 点の時系列データに対し、 $\Delta s = \Delta t = 0.01$ としてスキュタレ法を適用した。

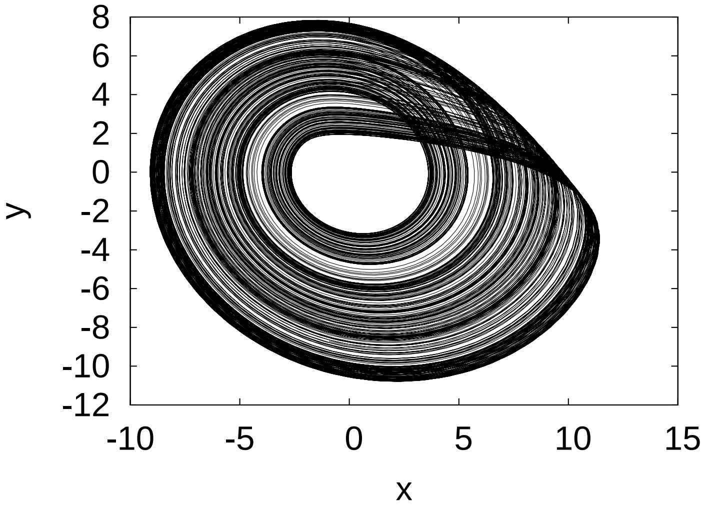

図 3.1: レスラーアトラクタ：パラメータ $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \mu = 5.7$ におけるレスラーモデルのアトラクタの平面 $z = 0$ への射影。横軸が x、縦軸が y である。

3.2.1 スキュタレ法の適用

我々は 2 章で述べたスキュタレ法の手続きに従い、レスラーモデルによって得られるカオス時系列から UPO の検出を行った。 $s = 4.00, 5.88$ における $D(t, s)$ の t 依

存性をそれぞれ図3.2,3.3に示す。 $D(t,s)$ の振る舞いは $s=4.00$ と $s=5.88$ とでは大きく異なり、図3.3では $D(t,s)$ が時折0近くへ急激に落ち込んでいる。この落ち込みは軌道上の二点 $(x)(t)$ と $(x)(t-s)$ が接近した事を表しており、この落ち込みが起こった時刻では UPO への巻き付きが生じている事が期待される。また $D(t,s)$ の t に関する最小値を取った $D_{\min}(s)$ のグラフを図3.4に示す。2章で述べた谷構造がはっきりと表れている事が図から分かる。 $D_{\min}$ が極小値であり、なおかつ $D_{\min}<\epsilon$ となる点を谷と呼ぶ事にする。ここで $\epsilon=0.1$ である。以下に述べる結果は $\epsilon=0.1$ の付近では ϵ の値によって敏感に変わらない。

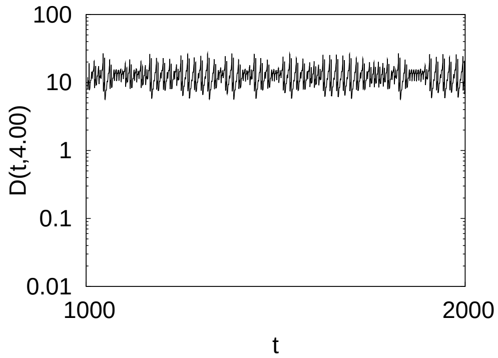

図 3.2: $D(t,s=4.00)$ の t 依存性：パラメータ $\alpha=0.2,\beta=0.2,\mu=5.7$ におけるレスラーモデルの時系列から作成した $D(t,s)$ の t 依存性を表すグラフ。横軸に t、縦軸に $D(t,s)$ を取った。ここで $s=4.00$ である。

また、図3.5は図3.4のグラフにおいて $0<s<30$ の範囲に拡大したものである。図3.5において矢印で示された六つの谷に対応する軌道断片を、図3.6〜3.11に示す。これらは全てカオス軌道の一部を抜き出したものであり、二つの端点をもつ。例えば、 $s=5.88$ では端点同士の距離は $D_{\min}(5.88)=3.96\times10^{-5}$ といったように端点同士は非常に近い位置にあるため、図の上ではほぼ同一の点に見える。また、図3.7、図3.10の黒線は二重に重なっている事を注意しておく。例えば図3.7で示される軌道は図3.6で示される軌道に沿って二周しており、隣り合った線が非常に近い位置にあるため、図では重なって一本に見えている。しかし非周期的であるカオス軌道の断片であるから、隣り合う二つの線は完全には一致しない事に注意が必要である。この事について以下で詳しい解説を行う。

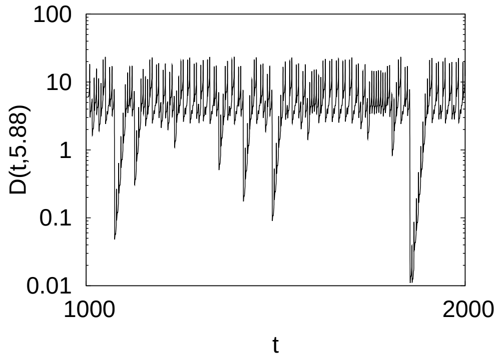

図 3.3: $D(t, s = 5.88)$ の t 依存性：図 (3.2) と同様のグラフを s=5.88 として作成したもの。0 近くへの落ち込みが見られる。

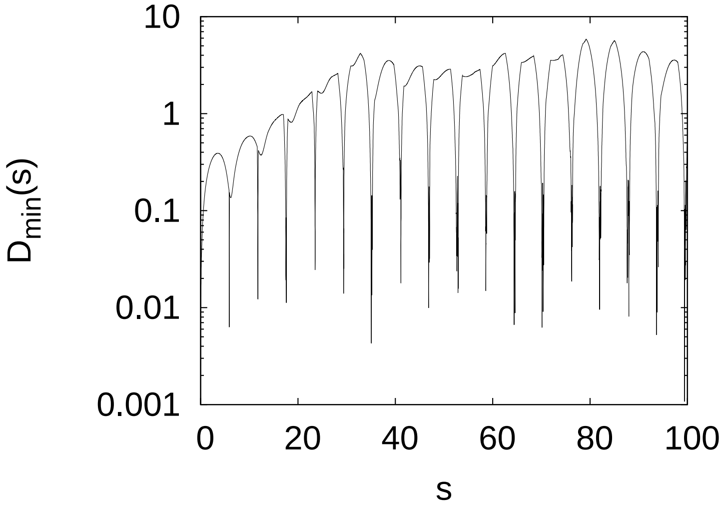

図 3.4: レスラーモデルにおける谷構造のグラフ：パラメータ $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \mu = 5.7$ におけるレスラーモデルの時系列から作成した $D_{\min}(s)$ のグラフ。横軸に s、縦軸に $D_{\min}$ を取ったグラフ。はっきりとした谷構造を見る事ができる。

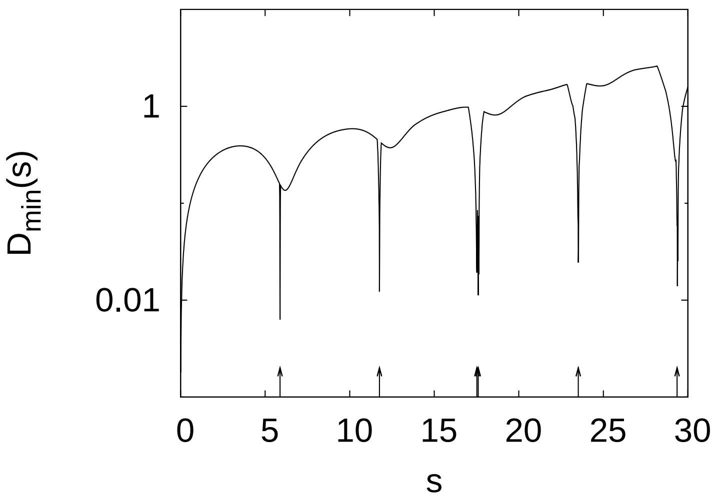

図 3.5: 図 3.4を拡大した図。矢印は左から $s = 5.88, 11.76, 17.52, 17.60, 23.52, 29.36$ における谷を示しており、各矢印が示す谷から軌道断片を抜き出した。三番目と四番目の矢印が重なっている事を注意しておく。

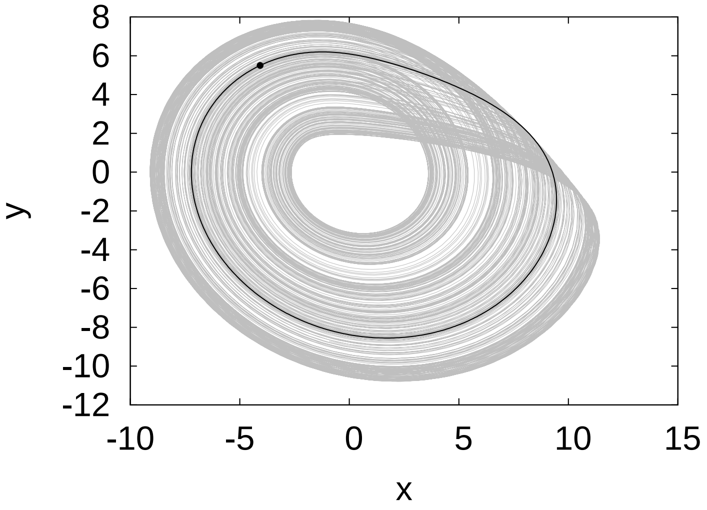

図 3.6: $D_{\rm min}$ の一番目の谷 ($s = 5.88$) から抜き出したカオス軌道の断片の図。横軸は x、縦軸は y である。黒の線は軌道断片、黒の点は軌道断片の端点、灰色の線はカオス軌道である。

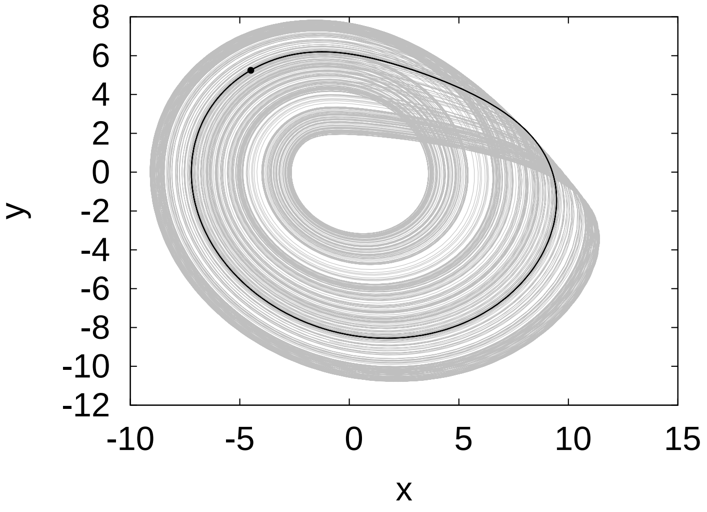

図 3.7: $D_{\rm min}$ の谷 ($s = 11.76$) から抜き出したカオス軌道の断片の図。黒線は二重になっている。

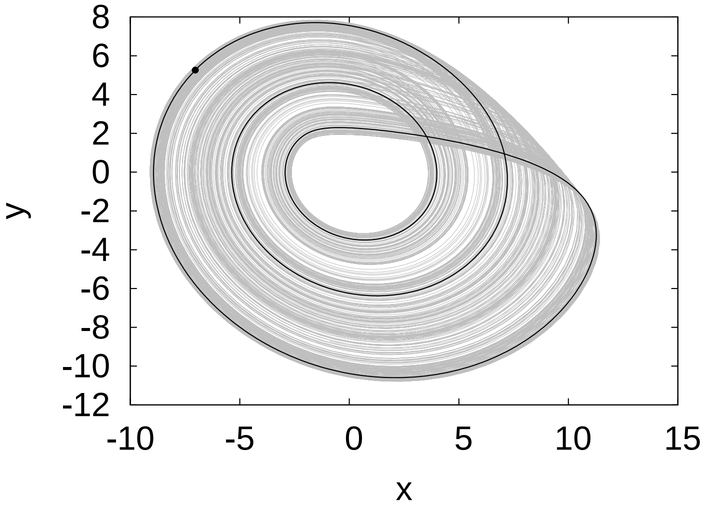

図 3.8: $D_{\rm min}$ の谷 ($s = 17.52$) から抜き出したカオス軌道の断片の図。

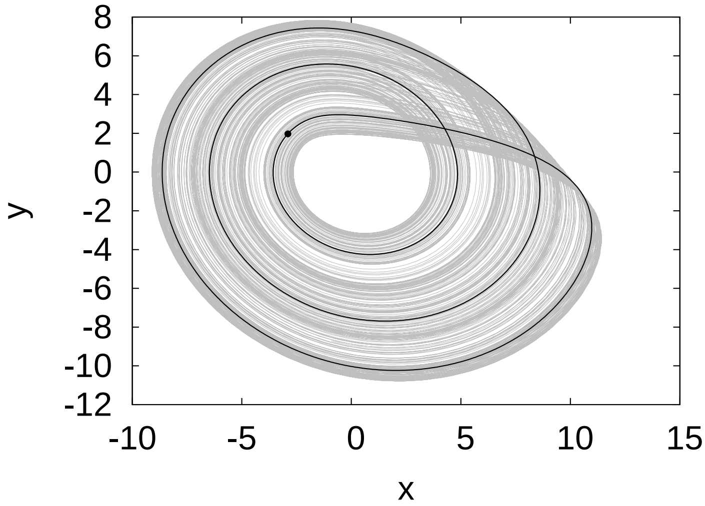

図 3.9: $D_{\min}$ の谷 ($s = 17.60$) から抜き出したカオス軌道の断片の図。

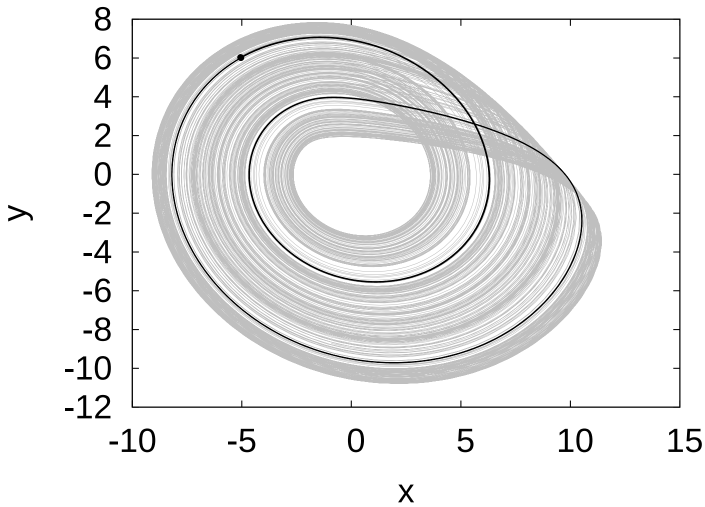

図 3.10: $D_{\min}$ の谷 ($s = 23.52$) から抜き出したカオス軌道の断片の図。

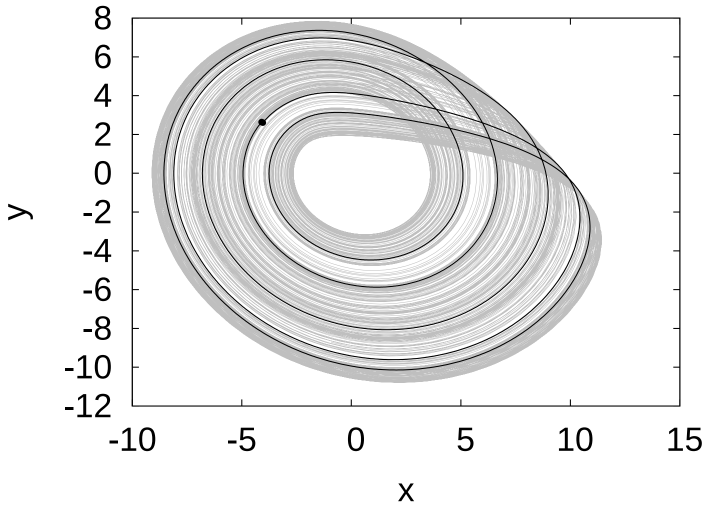

図 3.11: $D_{\min}$ の谷 $(s = 29.36)$ から抜き出したカオス軌道の断片の図。

3.2.2 周期整数倍の谷

カオス軌道がある UPO へ巻きついたとし、 UPO への巻き付きが始まってから巻き付きが終わるまでの時間を巻き付き滞在時間と呼ぶ事にする。巻き付き滞在時間はカオス軌道と UPO が近ければ近いほど長くなると考えられる。この時、巻き付きの対象である UPO の周期を τ であり、巻き付き滞在時間が τ の n 倍程度であるとすると $D_{\min}(s)$ は τ 近傍だけでなく、その整数倍である $2\tau, 3\tau, ..., n\tau$ の近傍においても谷を持つ。これを周期整数倍の谷と呼ぶ。また、 UPO の不安定性から、 UPO への巻き付きの回数 n が大きくなるにつれ、 $D_{\min}(n\tau)$ は大きくなると考えられる。つまり UPO と谷は必ずしも 1 対 1 の対応をするわけではなく、一つの UPO に対し複数の谷が対応する可能性がある。

$D_{\min}(s)$ の $s = 5.88$、 $s = 11.76$ における二つの谷に対応する軌道断片（図 3.6、3.7）を見ると、それらの形状はほぼ一致している事が分かる。したがって、これらの谷に対応する UPO は同一である、つまり谷 $s = 5.88$ に対応する軌道断片は UPO に一重に巻き付いた状態を示し、谷 $s = 11.76$ の軌道断片は同じ UPO に二重に巻きついた状態を示していると考える事ができる。

3.2.3 谷の重複

周期 τ を持つ UPO を U_τ と表し、U_τ に n 重に巻きつく軌道断片を $W^n(U_\tau)$ と表す。異なる二つの UPOU_{τ_1}, U_{τ_2} がそれぞれ周期 τ_1, τ_2 を持つとすると、$D_{\min}(s)$ において $s_1 \fallingdotseq \tau_1, s_2 \fallingdotseq \tau_2$ の二つの位置に谷が現れる事が期待される。しかし、τ_1 と τ_2 の差が $D_{\min}(s)$ の数値計算における刻み幅 Δs と同程度もしくは Δs より小さい場合、s_1, s_2 が同一の値となってしまう事が考えられる。これを谷の重複と呼ぶ。この時、この谷から得られる軌道断片は U_{τ_1}、U_{τ_2} のうち、より深い谷を与える（時系列全体において $D(s,t)$ をより小さくさせた）方の近似となる。

実際には前節で述べた周期整数倍の谷の出現と複合して谷の重複が起こる。レスラーモデルの例では以下のような事が起こっている。我々はレスラーモデルには $U_{5.88}$ と $U_{11.76}$ が存在し、$D_{\min}(s)$ の $s = 5.88$、$s = 11.76$、$s = 23.52$ における三つの谷に対応する軌道断片（図 3.6、3.7、3.10）はそれぞれ $W^1(U_{5.88})$、$W^2(U_{5.88})$、$W^2(U_{11.76})$ であると考えた。$W^2(U_{11.76})$ が存在すれば、その一部分として $W^1(U_{11.76})$ が必ず存在するはずである。しかし、$W^1(U_{11.76})$ をスキュタレ法で抜き出す事ができなかった。これは今回用いた $\Delta s = 0.01$ では $W^2(U_{5.88})$ と $W^1(U_{11.76})$ に対応する谷が重複してしまい、結果として $W^1(U_{11.76})$ は検出されず、$W^2(U_{5.88})$ だけが優先的に検出されたためであると考えられる。こういった現象は他の系でも見られると思われる[1]。

このように周期の近い二つの UPO を同時に検出したい場合は Δs を小さくする、もしくは、より詳細な解析が可能な他の方法を採用する必要がある。

3.2.4 ポアンカレ断面と行列を用いた高精度化

本小節では前小節で求められた UPO の近似軌道を用い、近似の精度を更に上げる方法を紹介する [12, 5]。d 次元カオス系で長時間の観測を行うと軌道が周期軌道に十分に近づき、巻き付きの時間が UPO の数周期分に及ぶ事がある。この軌道が横切る平面を取ると、この平面を軌道が一方向に横切ったときの交点の点列 X_n を構成することができる。この平面はポアンカレ断面と呼ばれる。一般に UPO はポアンカレ断面上では周期点で表されるが、ここでは簡単に巻き付きの対象となる UPO が周期 1 の点列を作るとする。つまり UPO が平面上の一つの固定点で表される場合を考える。この固定点を $X^\star$ とし、X_n は $X^\star$ に十分近く、X_n の振る舞いを $X^\star$ を原点と

[1] s が大きい領域では多くの UPO の周期背整数倍の谷が絡みあって存在する事になり、谷の重複も多く存在する事になるが、レスラーモデルでは特に s の小さい領域からこの現象が起こっている。

する線形変換で近似できると考える。この線形変換を行列 L で表すと

$$X_n - X^\star = L(X_{n-1} - X^\star), \tag{3.6}$$

$$X_{n-1} - X^\star = L(X_{n-2} - X^\star). \tag{3.7}$$

したがって

$$X_n - X_{n-1} = L(X_{n-1} - X_{n-2}). \tag{3.8}$$

ここで、

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}, \tag{3.9}$$

とおくと、

$$\Delta X_n = L\Delta X_{n-1}, \tag{3.10}$$

が成り立つ。$d-1$ 次元正方行列 R_{new}、R_{old} を

$$R_{new} \equiv (\Delta X_n, \Delta X_{n-1}, \Delta X_{n-1}, ..., \Delta X_{n-(d-2)}), \tag{3.11}$$

$$R_{old} \equiv (\Delta X_{n-1}, \Delta X_{n-2}, \Delta X_{n-3}, ..., \Delta X_{n-(d-1)}), \tag{3.12}$$

と定義すると、

$$R_{new} = LR_{old}, \tag{3.13}$$

$$R_{new}R_{old}^{-1} = L, \tag{3.14}$$

より、L を求める事ができる。式 (3.6) を変形し、

$$X^\star - LX^\star = X_n - LX_{n-1}, \tag{3.15}$$

$$X^\star = (I - L)^{-1}(X_n - LX_{n_1}), \tag{3.16}$$

とする事により、$X^\star$ を求める事ができる。

以上の行列を用いた解法で得られた $X^\star$ を系の初期値に取り、次にポアンカレ断面を通過するまで時間を発展させる事により、より良い精度で UPO やその周期を得る事ができると予想される。スキュタレ法で得られる UPO の周期と $D_{\min}$ の値、高精度化によって得られる UPO の周期と $D_{\min}$ の値、高精度化の手続きの中で得られる行列 L の最大固有値、および先行研究 [8] による UPO の周期、行列 L の最大固有値

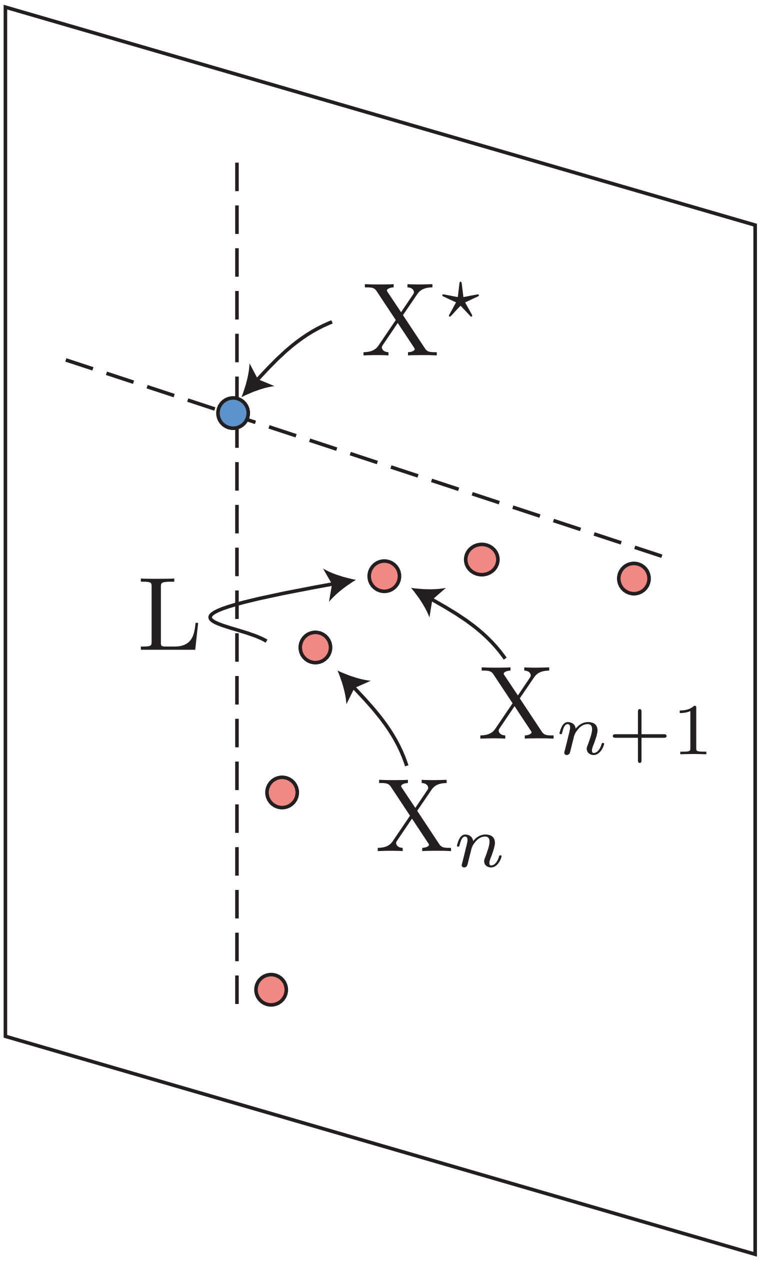

図 3.12: ポアンカレ断面と行列を用いた高精度化の模式図：線形近似が成り立つ事を前提に点列 X_n から固定点 $X^\star$ を求める事が可能である。

	スキュタレ法		高精度化法			Galias	
	τ	D_{min}	τ	D_{min}	λ_L	τ	λ_L
UPO1	5.88	6.297×10^{-3}	5.881088	1.371×10^{-6}	-2.403926	5.881088	-2.4039
UPO2	11.76	2.443×10^{-2}	11.758656	3.416×10^{-4}	-3.510762	11.748626	-3.51
UPO3	17.52	1.914×10^{-2}	17.516029	1.242×10^{-3}	-2.334027	17.515791	-2.34

表 3.1: スキュタレ法で得られる UPO の周期と D_{min} の値、高精度化法によって得られる UPO の周期と D_{min} の値、高精度化法の手続きの中で得られる行列 L の最大固有値 λ_L、および先行研究 (Galias) による UPO の周期、行列 L の最大固有値 λ_L の比較

の結果を比較した結果を表 3.2.4に示す。スキュタレ法で得られた軌道断片に行列による解法を施すことにより D_{min} の値が減少する事が分かる。これは UPO の近似精度が上がった事を示していると考えられる。また、その際に得られた UPO の周期や特性行列の固有値は先行研究とも良い一致を示している。

3.3 ローレンツモデル

ローレンツモデルとは 1960 年代初頭の気象学者 E.N.Lorenz が大気の乱流計算に使った微分方程式であり、カオスの発見のきっかけとなった有名な方程式であり [10]、変数 x, y, z とパラメータ σ, r, b に対し、

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y), \tag{3.17}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - xz + rx, \tag{3.18}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz. \tag{3.19}$$

で表される。

我々はこのローレンツモデルに対しても前述のレスラーモデルと同様の解析を行う。ここでモデルのパラメータとして $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ を選択する。

レスラーモデル（パラメータ $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \mu = 5.7$）において不規則ながらも概してある一つの軸の周りに回転するような運動として軌道が描かれるのに対し、ローレンツモデルのカオス軌道（図 3.13）は二つの軸を持っているように見える。ローレンツモデルはこの二つの軸のような空間の中に不安定固定点を持つ。時間間

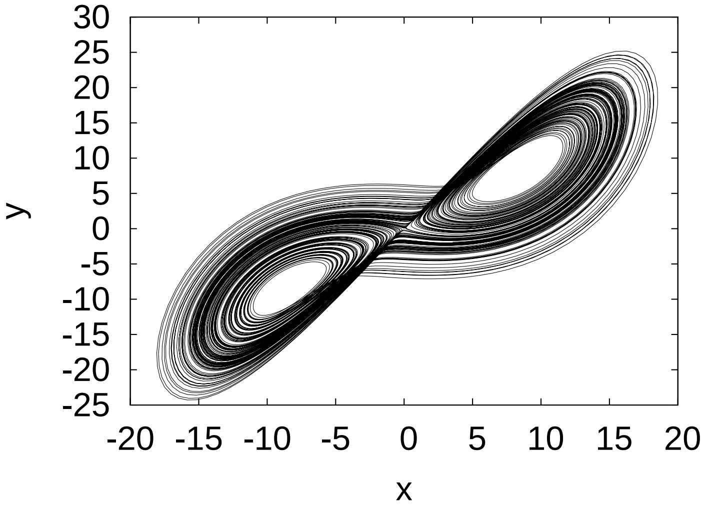

図 3.13: ローレンツアトラクタ：パラメータ $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ におけるローレンツモデルのアトラクタの平面 $z = 0$ への射影。横軸が x、縦軸が y である。

隔を $\Delta t = 0.002$ として作成された $N = 10000$ 点の時系列データに対し、 $\Delta s = \Delta t = 0.002$ としてスキュタレ法を適用した。

3.3.1 スキュタレ法の適用

図 3.14、図 3.15はローレンツモデルによる時系列から得られた $D_{\min}(s)$ のグラフとその拡大図であり、レスラーモデルと同様、谷構造が見られる事がわかる。ここでは $D_{\min}$ が極小値であり、なおかつ $D_{\min} < \epsilon$ となる点を谷と呼ぶ事にする。図 3.15において、矢印で示した谷から近似的な UPO となる軌道断片を抜き出した。それらの軌道断片を図 3.16〜図 3.21に示す。

ここで $\epsilon = 0.4$ である。

前節で扱ったレスラーモデルと同様、ローレンツモデルにおいても、整数倍周期の谷、谷の重複といった現象が起こっていると考えられる。ローレンツモデルには $x \to -x, y \to -y$ という変換に対する系の対称性が存在する。したがって、ローレ

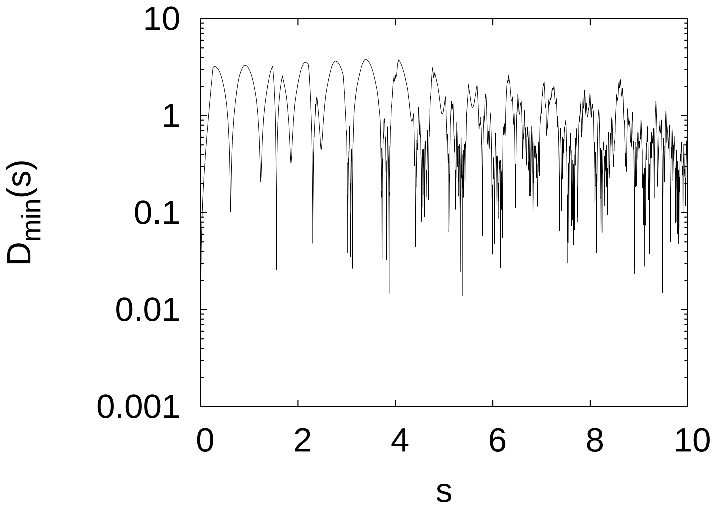

図 3.14: ローレンツモデルにおける谷構造のグラフ：パラメータ $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ におけるローレンツモデルの時系列から図 3.4と同様に作成した $D_{\min}(s)$ のグラフ。横軸に s、縦軸に $D_{\min}$ を取ったグラフ。

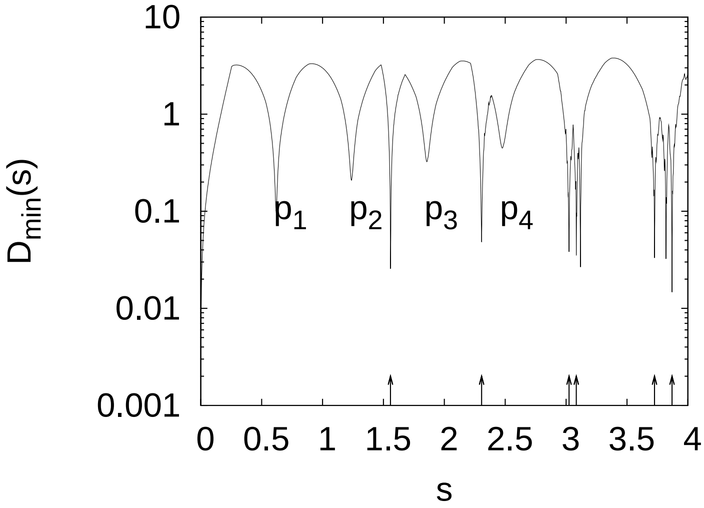

図 3.15: 図 3.14の拡大図。矢印は左から $s = 1.558, 2.306, 3.024, 3.084, 3.726, 3.870$ における谷を示しており、各矢印が示す谷に対応する軌道断片を図 3.16〜 3.21で描いた。$0 < s < 3$ の範囲にほぼ等間隔に表れる 4 つの谷 $p_1, ..., p_4$ については小節 3.3.2で詳しく考察する。

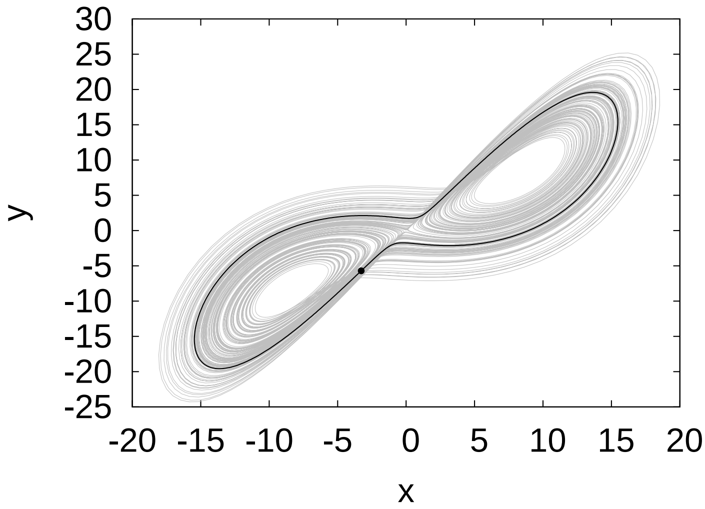

図 3.16: D_{min} の谷構造 ($s = 1.558$) から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。横軸が x、縦軸が y である。黒の線は軌道断片、黒の点は軌道断片の端点、灰色の線はカオス軌道である。

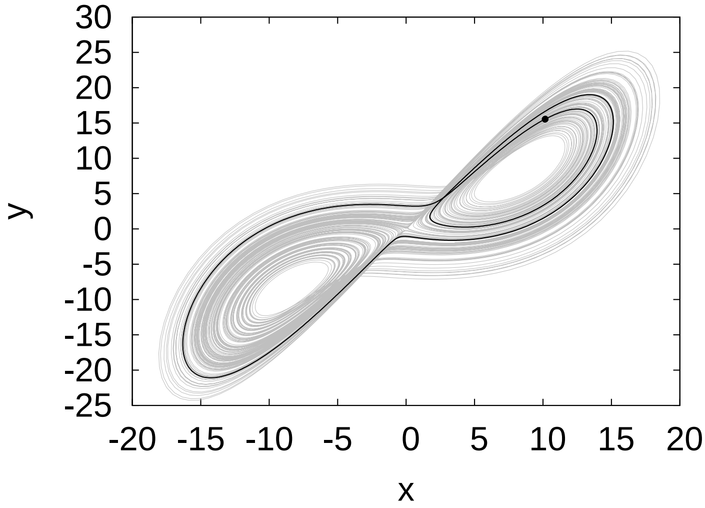

図 3.17: $D_{\min}$ の谷構造 $(s = 2.306)$ から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。

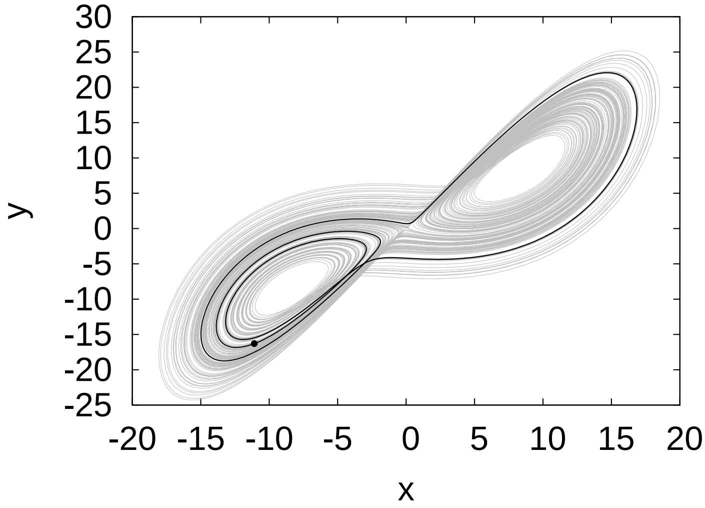

図 3.18: $D_{\min}$ の谷構造 $(s = 3.024)$ から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。

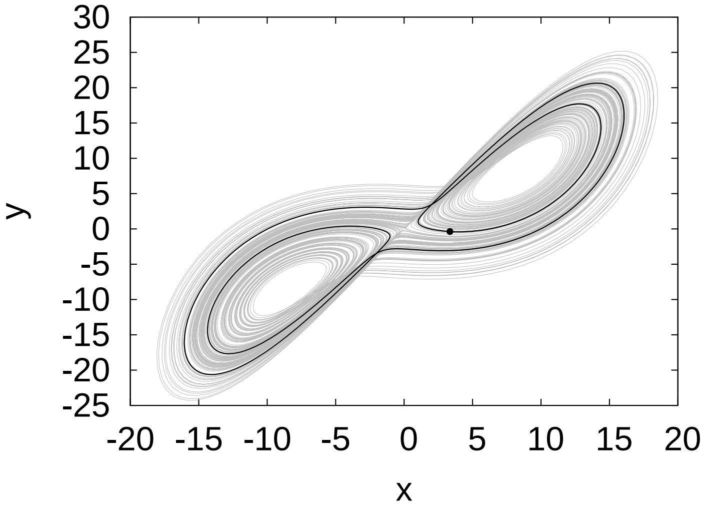

図 3.19: D_{min} の谷構造 $(s = 3.084)$ から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。

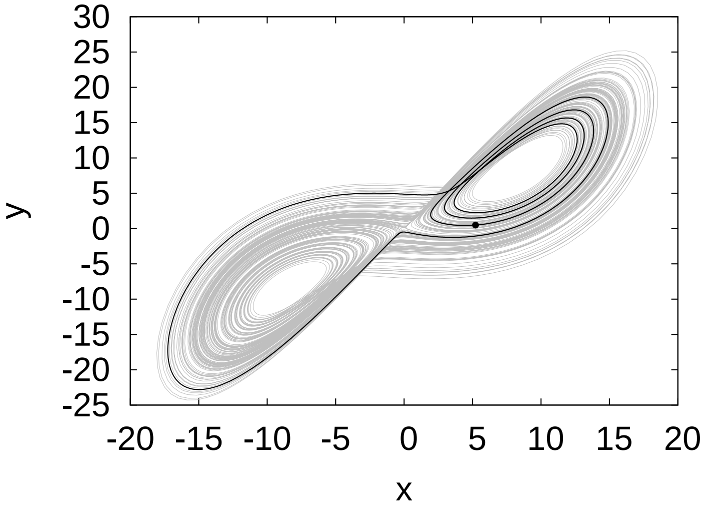

図 3.20: D_{min} の谷構造 $(s = 3.726)$ から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。

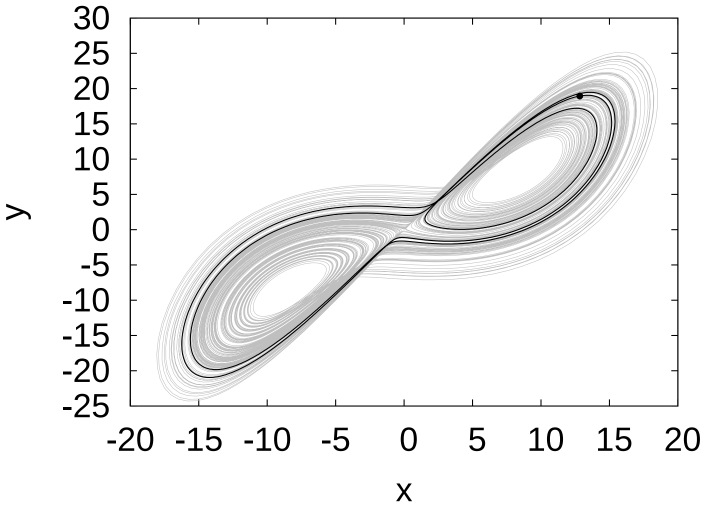

図 3.21: $D_{\min}$ の谷構造 ($s = 3.870$) から抜き出したローレンツモデルのカオス軌道の断片の図。

ンツモデルではある一つの軌道が

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

と表されるならば、その軌道を z 軸周りに π だけ回転してできる軌道

$$\begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

が存在する。同様に、ある UPO に対し z 軸周りに π だけ回転してできる軌道もまた UPO であり、対称の関係にある一対の UPO は全く同じ周期を持つ。したがって前章で述べた谷の重複により、一対の UPO の内、どちらか一方のみが検出される事となる。

3.3.2　固定点の安定性による谷の位置のフィッティング

図 3.15で示した 4 つの谷 $p_1, ..., p_4$ はそれぞれ、 $s = 0.618, 1.238, 1.856, 2.476$ に位置し、 s に関してほぼ等間隔に現れる。 $p_1, ..., p_4$ は前章で述べた周期整数倍の谷の表れであると考えられ、またこれらの谷に対応する軌道断片が不安定固定点に近い空間に描かれる事が図 3.22からわかる。この事より、その位置・深さは不安定固定

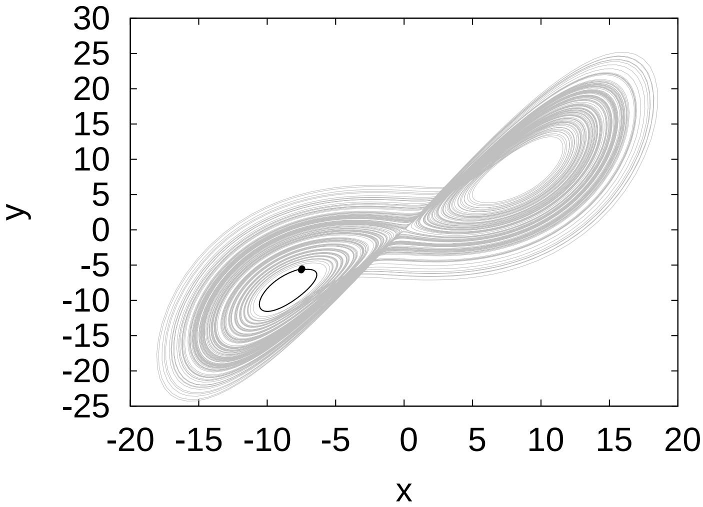

図 3.22: 谷 p_1 から抜き出した軌道断片。 p_2, p_3, p_4 から得られる軌道断片も同様の形状となり、この軌道を幾重かしたものとなる。

点の持つ特徴を反映していると考えた。[2]。以下ではこれらの谷の位置・深さを不安定固定点近傍での線形近似によって見積もる方法を示す。

式 (3.19) の左辺を 0 と置きそれを解く事により固定点の座標を解析的に求める事ができ、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

[2]実際、我々はこれらの谷に対応する軌道は UPO ではなく、不安定固定点そのものであると考えている。また、これらの谷が出現する位置や深さは他の谷に比べ、初期条件や、観測時間に対する依存性が大きい。

となる。この点でのヤコビ行列の三つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めると、

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha + i\beta = 0.093956 + 10.194505i && (3.23)\\
\lambda_2 &= \alpha - i\beta = 0.093956 - 10.194505i && (3.24)\\
\lambda_3 &= -13.854578, && (3.25)
\end{aligned}$$

となる。ここで α, β はそれぞれ λ_1 の実部、虚部である。

安定方向の収束の速さを示す λ_3 の絶対値が不安定方向の発散の速さを示す α に比べ非常に大きいため[3]、安定方向の運動を無視できると考えると不安定固定点近傍での運動は不安定固定点を原点とした不安定多様体上での線形な運動で近似できる。この時、軌道 $\boldsymbol{x}$ は定ベクトル $\boldsymbol{x}_c$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_c \exp(\lambda_1 t) + \bar{\boldsymbol{x}}_c \exp(\lambda_2 t), \tag{3.26}$$

と表される。ここで $\bar{\boldsymbol{x}}_c$ は $\boldsymbol{x}_c$ の複素共役である。図 3.23は不安定固定点周りでの軌道の様子、およびポアンカレ断面上での点列の振る舞いを表す模式図である。ここで谷を与える点が、同一ポアンカレ平面上にあると仮定すると、平面を横切ってから次に横切るまでの時間は $\dfrac{2\pi}{|\beta|}$ であり、各点の位置 $\boldsymbol{x}_n$ は定ベクトル $\boldsymbol{x}'_c$ を用いて

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}'_c \exp\left(\frac{2\pi\alpha n}{|\beta|}\right), \tag{3.27}$$

と表される。従って n 番目の谷の位置と深さは

$$(s, D_{\min}(s)) = \left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, A\left(\exp\left(\frac{2\pi\alpha n}{|\beta|}\right) - 1\right)\right), \tag{3.28}$$

と表す事ができる。ここで $A = |\boldsymbol{x}_c|$ であり、なんらかの方法で A を決定すれば全ての谷の位置と深さを見積もる事ができる。3.28に従い、谷の位置を近似したものを図 3.24に示す。この図では第一の谷の深さを用いて A の値を決定している。この見積もりで谷の位置と深さは十分に近似できる事が図から分かる。これらの谷の位置と深さは不安定固定点の性質をよく反映している。UPO の近傍での軌道の振る舞いについては節 4.1で考察する。

[3]指数関数は増大は速く減少は遅いためこの比較に妥当性については議論の余地がある。

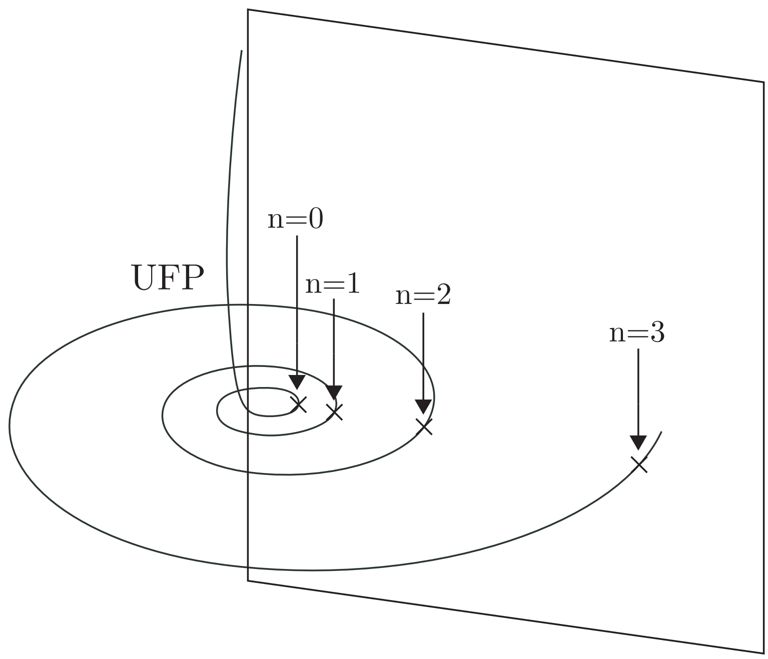

図 3.23: 不安定固定点近傍での軌道とポアンカレ断面上の点列の模式図

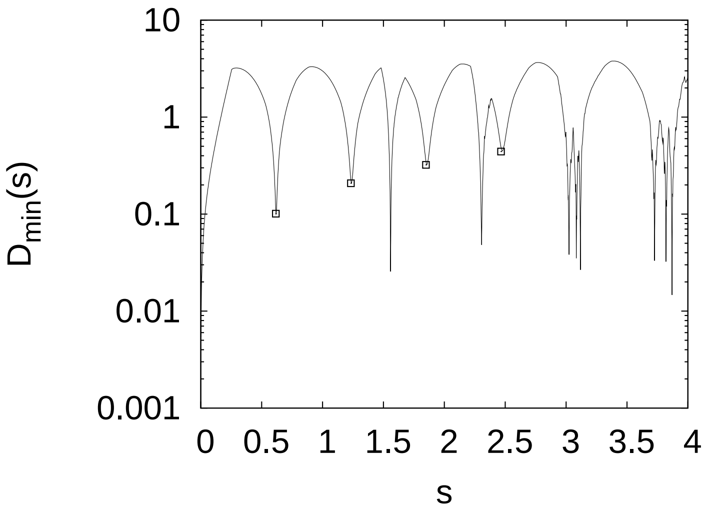

図 3.24: 不安定固定点の固有値による谷の座標の近似。四角形で示された点は式 (3.28) によって見積もった四つの谷の位置と深さである。ここで用いた値は $\alpha = 0.0939, \beta = 10.1945, A = 1.695$ であり、α, β は不安定固定点の固有値の解析から、A は $D_{\min}(s)$ における第一の谷の値から決定した。

3.3.3 系の対称性を考慮した検出法

既に述べたとおり、ローレンツモデルは $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ という変換に対する対称性がある。ある UPOU_τ に対し、U_τ を z 軸周りに π だけ回転してできる UPO を $\bar{U_\tau}$ とする。ローレンツモデルの UPO には $U_\tau = \bar{U_\tau}$ を満たすものがあり、この UPO は系の持つ対称性を保存する重要な軌道となる。この小節ではスキュタレ法を拡張し、この $U_\tau = \bar{U_\tau}$ を満たす UPOU_τ を検出する方法を提案する。p が周期 τ を持ち、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

と表されるとすると、

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{-\infty=n}^{\infty} x_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}}, \\ y(t) &= \sum_{-\infty=n}^{\infty} y_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}}, \\ z(t) &= \sum_{-\infty=n}^{\infty} z_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

ここで $U_\tau = \bar{U_\tau}$ より、定数 t_0 を用いて、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t-t_0) \\ -y(t-t_0) \\ z(t-t_0) \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty=n}^{\infty} x_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}} &= -\sum_{-\infty=n}^{\infty} x_n e^{i\frac{2\pi nt - t_0}{\tau}}, \\ \sum_{-\infty=n}^{\infty} y_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}} &= -\sum_{-\infty=n}^{\infty} y_n e^{i\frac{2\pi nt - t_0}{\tau}}, \\ \sum_{-\infty=n}^{\infty} z_n e^{i\frac{2\pi nt}{\tau}} &= \sum_{-\infty=n}^{\infty} z_n e^{i\frac{2\pi nt - t_0}{\tau}}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

となる。$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$ であるならば U_τ の周期が τ であるという仮定に反する。また、$z_1 \neq 0$ ならば

$$z_1 e^{i\frac{2\pi t}{\tau}} = z_1 e^{i\frac{2\pi t - t_0}{\tau}}, \tag{3.33}$$

$$1 = e^{i\frac{-2\pi t_0}{\tau}}, \tag{3.34}$$

$$\frac{t_0}{\tau} = \pm 1, \pm 2, ..., \tag{3.35}$$

従って式 (3.31) は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

となり、 $x(t) = y(t) = 0$ が成り立ち、 p の軌道は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

と表されることになるが、一般に実数の範囲ではこういった一次元空間上の軌道は周期軌道には成り得ないため、不適である。従って $x_1 \neq 0$ または $y_1 \neq 0$ であるが、どちらでも同様の議論が可能であるから、 $x_1 \neq 0$ であるとすると、

$$x_1 e^{i\frac{2\pi t}{\tau}} = -x_1 e^{i\frac{2\pi t - t_0}{\tau}}, \tag{3.38}$$

$$-1 = e^{i\frac{-2\pi t_0}{\tau}}. \tag{3.39}$$

従って、

$$\frac{t_0}{\tau} = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, ..., \tag{3.40}$$

となる。従って式 (3.31) は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t - \frac{1}{2}\tau) \\ -y(t - \frac{1}{2}\tau) \\ z(t - \frac{1}{2}\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

を満たす。ここで任意の軌道

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

に対し、

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -x(t-\frac{1}{2}\tau) \\ -y(t-\frac{1}{2}\tau) \\ z(t-\frac{1}{2}\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

とおく。ここでローレンツモデルにおけるカオス軌道上の時刻 t での状態 $\boldsymbol{x}(t)$ に対し、 $D(t,s)$ に代えて、次の対称性を考慮した距離 $\bar{D}(t,s)$ を考えることができる。

$$\bar{D}(t,s) \equiv \|\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x(t-\frac{1}{2}s) \\ -y(t-\frac{1}{2}s) \\ z(t-\frac{1}{2}s) \end{pmatrix} \right\|. \tag{3.44}$$

$\bar{D}(t,s)$ によって、式 (2.5) と同様にして $\bar{D}_{\min}$ が自然に次のように定義される。

$$\bar{D}_{\min}(s) \equiv \min_t \bar{D}(t,s). \tag{3.45}$$

図 3.25は同じ時系列に対して $\bar{D}_{\min}(s)$ と $D_{\min}(s)$ のグラフを重ねて描いたものである。$\bar{D}_{\min}(s)$ は $s = 1.558$ と $s = 3.084$ においてのみ谷を持つ事がわかる。また、それぞれに対応する軌道断片は図 3.16と図 3.19に示したものと同じあり、これらの軌道断片はローレンツモデル持つ $x \to x, y \to -y$ に関する対称性をよく保存している。つまり、 $\bar{D}_{\min}(s)$ を用いる事により、対称性を有する UPO のみを検出する事が可能である。対称性の一般化については 5 章で述べる。

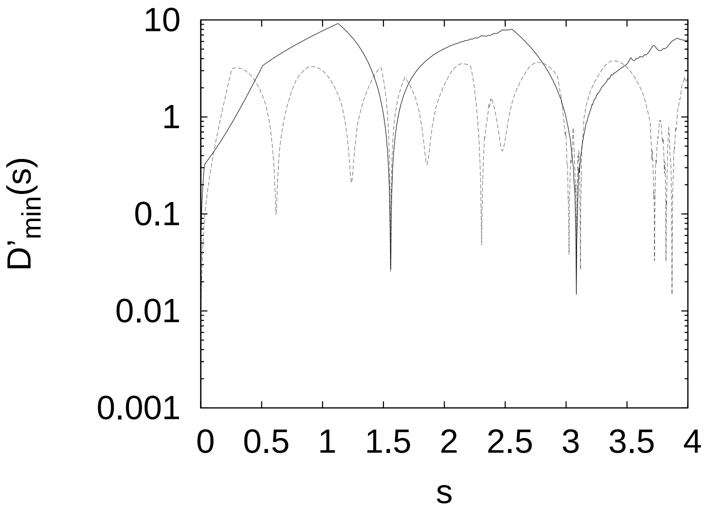

図 3.25: 対称性を考慮したスキュタレ法と考慮しない方法との比較。実線は縦軸に $\bar{D}_{\min}(s)$、点線は縦軸に $D_{\min}(s)$ を用い、横軸は s である。

第 4 章

スキュタレ法の諸性質

Lathrop らの方法とスキュタレ法は時系列解析という意味では同じものであり、軌道の UPO への巻き付きを捉えるという点においても共通している。二つの方法の大きな違いは、スキュタレ法では $D_{\min}(s)$ という量を取り上げたという点である。また、$D_{\min}(s)$ のグラフはその周辺での軌道速度や、UPO の持つ特性乗数、不安定固定点の特性乗数など、系の多くの性質を反映している。また我々の用いた D という量は遅延フィードバック法と深く関連している。

4.1 UPO による周期整数倍の谷の位置

3.3.2 では固定点近傍における軌道の振る舞いによってできる谷について議論した。この節では UPO への数周期に渡る巻き付きによって生じる周期整数倍の谷と UPO 近傍のポアンカレ断面上での軌道の振舞いを表す行列との関係を考える。周期整数倍の谷が表れる位置を $\tau, 2\tau, 3\tau, ..., n\tau$ とする。また、周期整数倍の谷を与える軌道上の点のどれもが UPO 上の一点 $\boldsymbol{x}^\star$ の近傍にあり、すべて同一のポアンカレ断面上にあると仮定する。この時、周期整数倍の谷を与える軌道上の点のうち、どの二点を取ってもその二つの点はおよそ τ の整数倍だけの時間差を持つことになる。そこで、これらの点のうち最も $\boldsymbol{x}^\star$ に近づいたものを $\boldsymbol{x}_0$ とし、$\boldsymbol{x}_0$ から $i\tau$ だけ時間を進めた軌道上の点を $\boldsymbol{x}_i$ とおく。また、$\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}^\star$ の近傍に存在するように i の範囲を取る。ここで i は整数であり、特に負の整数値も取りうる事に注意しておく。この時、周期整数倍の谷を与える点は一対の $\{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i'}\}$ で決まり、したがって j 番目の谷の深

さは

$$D_{\min}(j\tau) = \min_i ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-j}||, \tag{4.1}$$

で与えられる事となる。ここで $\delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^\star$ と置くと、

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-j}|| &= ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^\star - (\boldsymbol{x}_{i-j} - \boldsymbol{x}^\star)|| && (4.2) \\ &= ||\delta\boldsymbol{x}_i - \delta\boldsymbol{x}_{i-j}||, && (4.3) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i-j}$ はいずれも $\boldsymbol{x}^\star$ の近傍に含まれる事から、ポアンカレ断面上で、 UPO の近傍での軌道の振舞いを表す行列 A と、 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて近似でき、

$$\begin{aligned} ||\delta\boldsymbol{x}_i - \delta\boldsymbol{x}_{i-j}|| &\fallingdotseq ||A^i\delta\boldsymbol{x}_0 - A^{i-j}\delta\boldsymbol{x}_0|| && (4.4) \\ &= ||A^i(I - A^{-j})\delta\boldsymbol{x}_0||, && (4.5) \end{aligned}$$

となる。三次元の力学系におけるポアンカレ断面上での振舞いを考えるとすると、A は 2×2 行列である。ここで $x^\star$ は UPO によってつくられるポアンカレ断面上の双曲的固定点であり、 A の固有値を λ_1, λ_2 とすると $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ となる。また連続力学からの要請によって $\det A > 0$ であり、従って $\lambda_1\lambda_2 > 0$ である。 $\delta\boldsymbol{x}_0$ を A の固有ベクトルによって分解すると、

$$\begin{aligned} A^i(I - A^{-j})\delta\boldsymbol{x}_0 &= A^i(I - A^{-j})(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) && (4.6) \\ &= \lambda_1^i(1 - \lambda_1^{-j})\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2^i(1 - \lambda_2^{-j})\boldsymbol{v}_2, && (4.7) \end{aligned}$$

と置く事ができる。上式の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は λ_1, λ_2 に対応する A の固有ベクトルであり、 $\boldsymbol{v}_1$ は不安定方向、 $\boldsymbol{v}_2$ は安定方向を表す。従って

$$D_{\min}(j\tau) = \min_j ||\lambda_1^i(1 - \lambda_1^{-j})\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2^i(1 - \lambda_2^{-j})\boldsymbol{v}_2||, \tag{4.8}$$

という $D_{\min}(j\tau)$ と λ_1, λ_2 の関係が得られる。

4.2 スキュタレ法で得られる谷の形状

$D_{\min}(s)$ の谷となる位置の近傍での関数形を求める。軌道は周期 τ をもつ UPO U_τ に巻きついており、谷は τ の位置にあるとする。この谷を与える時刻を $t^\star$ とすると

$$D_{\min}(\tau) = ||\boldsymbol{x}(t^\star) - \boldsymbol{x}(t^\star - \tau))||. \tag{4.9}$$

谷の位置から微小なずれ $\delta\tau$ を持つ点では、

$$
\begin{aligned}
D_{\min}(\tau+\delta\tau) &= \min_t D(t,\tau+\delta\tau) &(4.10)\\
&= \min_{\delta t} D(t^\star+\delta t,\tau+\delta\tau) &(4.11)\\
&= \min_{\delta t} ||\boldsymbol{x}(t^\star+\delta t)-\boldsymbol{x}(t^\star+\delta t-(\tau+\delta\tau))||, &(4.12)
\end{aligned}
$$

となる。ここで δt が小さいとき、

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{x}(t^\star+\delta t)-\boldsymbol{x}(t^\star+\delta t-(\tau+\delta\tau))||\\
\fallingdotseq\ &||\boldsymbol{x}(t^\star)+\dot{\boldsymbol{x}}(t^\star)\delta t-(\boldsymbol{x}(t^\star-\tau)+\dot{\boldsymbol{x}}(t^\star-\tau)(\delta t-\delta\tau))||=(*), \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

と書ける。

ここで、式 (2.1) より、

$$
(*)=||\boldsymbol{x}(t^\star)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))\delta t-(\boldsymbol{x}(t^\star-\tau)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star-\tau))(\delta t-\delta\tau))||=(**), \qquad (4.14)
$$

$\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t^\star)-\boldsymbol{x}(t^\star-\tau)$ は十分小さいと考え、

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star-\tau))=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{x}(t^\star)}\delta\boldsymbol{x}. \qquad (4.15)
$$

と置く。$\delta\boldsymbol{x}\delta t$ は無視できるとすると、

$$
(**)=||\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))\delta\tau||. \qquad (4.16)
$$

したがって、もし、式 (4.12) の最小値を与える δt が十分小さいとき、

$$
D_{\min}(\tau+\delta\tau)\fallingdotseq||\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))\delta\tau||, \qquad (4.17)
$$

であり、また、

$$
\begin{aligned}
D_{\min}(\tau+\delta\tau)^2 &\fallingdotseq |\delta\boldsymbol{x}|^2+\delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))\delta\tau+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))|^2\delta\tau^2 &(4.18)\\
&= D_{\min}(\tau)^2+\delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))\delta\tau+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))|^2\delta\tau^2, &(4.19)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $D_{\min}(\tau)$ が $D_{\min}(s)$ の極小値となる事から、

$$
\delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))=0. \qquad (4.20)
$$

したがって

$$D_{\min}(\tau+\delta\tau)^2 \fallingdotseq D_{\min}(\tau)^2 + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))|^2\delta\tau^2, \tag{4.21}$$

となる。すなわち、谷付近での $D_{\min}$ の形状は軌道速度の絶対値 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))|$ によって決まる事になる。また、必ずしも δt が小さくない時であっても

$$D_{\min}(\tau+\delta\tau)^2 \leqq D_{\min}(\tau)^2 + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t^\star))|^2\delta\tau^2, \tag{4.22}$$

と $D_{\min}(\tau+\delta\tau)^2$ の上限を評価できる。

レスラーモデルの解析において得られた $s = 5.88$ の谷に対し、その事を確かめたものが図 4.1に示す。図より谷の近傍では式 (4.21) による見積もりが妥当である事が分かる。

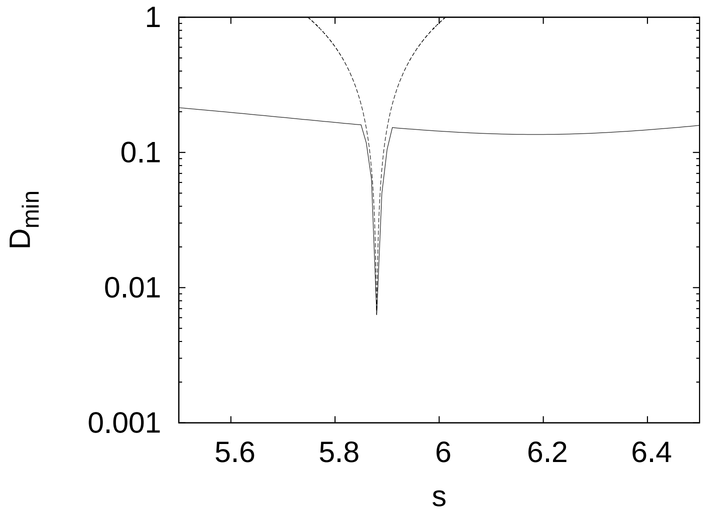

図 4.1: 実線は図 (3.4) を $5.5 < s < 6.5$ の範囲に拡大したもの。点線は式 (4.21) のグラフ。

4.3 遅延フィードバック法との関連

Pyragas によって提案された遅延フィードバック法 [1] は、微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t), \tag{4.23}$$

で表される系に対し、外力 $K(\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}(t))$ を加え、

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)+K(\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}(t)), \tag{4.24}$$

とする事により系が持つカオスアトラクタに含まれる周期 τ の UPO を安定化させるものである。ここで K はフィードバックゲインを表す行列であり、 $\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}(t)$ はフィードバック項である。軌道が UPO に一致したとき、 $D=||\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau)||$ は 0 となるため、 D は安定化の指標として用いられる。また対称性を持つ力学系に対する半周期遅延フィードバック法が上田らによって提案されている [4]。ローレンツモデルの対称性を考慮した検出法の中で用いた $\bar{D}$ は上田らが用いたフィードバック項の絶対値である。ただし、スキュタレ法ではこの D、 $\bar{D}$ を安定化の指標としてではなく、 UPO への巻き付きの度合いを表す量として用いている。つまり、遅延フィードバック法におけるフィードバック項は安定化においてだけではなく、時系列解析においても有用である。また、遅延フィードバック法におけるパラメータの推定法として、本方法は有効であると思われる。

4.4 再構成アトラクタ

力学系における運動は，その系の状態を決定する変数を直交座標軸とした位相空間内の軌道として表現することができる。しかし現実の系においては状態を決定する変数すべてを知ることは不可能である。本来の系が作るアトラクターの次元が n であり、そこから 1 変数の時系列データ $\{x_i\}$ が得られたとする。この時、遅延時間 τ_r を用いて m 次元ベクトル

$$\boldsymbol{v}_{t_i}=\{x(t_i),x(t_i+\tau_r),x(t_i+2\tau_r),...x(t_i+(m-1)\tau_r)\}, \tag{4.25}$$

によって m 次元相空間内にアトラクターを作る事ができる。また、このアトラクターは再構成アトラクターと呼ばれる。このとき $m \geqq 2n$ であれば本来の系のアトラクターと再構成アトラクターの性質は一致することが知られている [9]。スキュタレ法においてはアトラクター上の軌道間の距離の測定を行う。そのため、現実のデータに対しスキュタレ法を適用する際は、時系列からこのようなアトラクターの再構成を行う事が必要である。

第 5 章

スキュタレ法の一般化

系 (2.1) がある変換

$$T : \boldsymbol{x} \to \bar{\boldsymbol{x}}, \tag{5.1}$$

に対し不変ならば、系 (2.1) は変換 T に関して対称であると呼ぶ。このとき、

$$\boldsymbol{x} = T(\boldsymbol{x}), \tag{5.2}$$

を満たす系 (2.1) の解を T に関する対称解と呼ぶことにする。周期軌道は離散的な時間並進変換 $S : \boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}(t - n\tau), (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$ に関する対称解であると言える。今回、提案したスキュタレ法は UPO すなわち不安定な離散的時間並進対称解を検出する方法であるが、この方法を一般の対称な不安定解を検出する方法へ拡張する事を考える。これは 3 章でローレンツモデルにおいて行った対称性を考慮した検出法の一般化である。すなわち、時間 t における状態 $\boldsymbol{x}(t)$ 対して、T によって変換した像 $T(\boldsymbol{x}(t))$ との距離を導入し、

$$D(t) \equiv \|\boldsymbol{x}(t) - T(\boldsymbol{x}(t))\|, \tag{5.3}$$

と置き、

$$D_{\min} \equiv \min_{0<t<T} D(t), \tag{5.4}$$

とすることにより、様々な変換に対する対称不安定解の検出への拡張ができる。例えば、偏微分方程式で表されるような空間的に広がった系に対し、空間的な対称性を持つ解の検出を行うといった事が考えられる。次節では多粒子系に対する拡張を行う。

5.1 多粒子系に対するスキュタレ法の拡張

多粒子系では、系を表す方程式は次の様に書き下す事ができる。

$$\frac{d\boldsymbol{x_i}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n), (\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, ..., n), \tag{5.5}$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ の各要素は i 番目の粒子の位置や運動量といった量を表す。 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は粒子の独立な運動、すなわち時間変化しないポテンシャル、自励的な力、散逸を表す項である。 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)$ は相互作用を表す項であり、

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_i, ..., \boldsymbol{x}_j, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_j, ..., \boldsymbol{x}_i, ..., \boldsymbol{x}_n), (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{5.6}$$

を満たすとする。式 (5.6) は相互作用項の粒子の交換に対する不変性を意味しており、従って系 (5.5) は

$$\boldsymbol{x}_i(t) \to \boldsymbol{x}_j(t), \boldsymbol{x}_j(t) \to \boldsymbol{x}_i(t), \tag{5.7}$$

というインデックスの入れ替えに対し不変となる。この入れ替えに対する対称性を保存する解とは、 n 個の粒子が全く同一の状態にある場合である。つまり粒子を振動子と見做せば、完全同期解ということになる。こういった前提の中で粒子の結晶構造といった粒子間の相互の関係によって特徴付けられる対称性を考える。例えば $\boldsymbol{x}_i$ が i 番目の粒子の座標を表すものであり、 $\boldsymbol{x}$ によって微分可能な変換 $T : \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}'_i$ を導入する。 T は座標の回転や、並進などの変換である。ここで

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x_i}}\frac{d\boldsymbol{x_i}}{dt} = \boldsymbol{f}(T(\boldsymbol{x}_i)) + \boldsymbol{g}(T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), ..., T(\boldsymbol{x}_n)), \tag{5.8}$$

が系 (5.5) と同値であったなら、系は入れ替えだけでなく、 T に関する対称性も持つこととなる。ここで X を $m \times n$ 行列として、

$$T(X) \equiv T((\boldsymbol{x}_{\nu 1}, \boldsymbol{x}_{\nu 2}, ..., \boldsymbol{x}_{\nu n})) = (T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), ..., T(\boldsymbol{x}_n)), \tag{5.9}$$

と定義する。

次に、 $\mathbb{R}^m$ になんらかの順序関係を導入し、全順序を定める。具体的には、次のような辞書式順序を導入すればよい。粒子 $\boldsymbol{x}_i$ の第 p 番目の要素を x_{pi} とすると、二つの粒子 $\boldsymbol{x}_i$,$\boldsymbol{x}_j$ に対し、ある自然数 $k < m$ が存在し、 k 以下の任意の自然数 l に対し、

$$x_{li} = x_{lj}, \tag{5.10}$$

が成り立ち、かつ、

$$x_{ki} > x_{ki}, \tag{5.11}$$

が成り立つ時、

$$\boldsymbol{x}_i > \boldsymbol{x}_j, \tag{5.12}$$

であり、任意の自然数 $l < m$ に対し

$$x_{li} = x_{lj}, \tag{5.13}$$

が成り立つ時、

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j, \tag{5.14}$$

である定めると、全順序を導入する事ができる。

このように何らかの全順序を導入する事により、 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ に対し、

$$\boldsymbol{x}_{\nu 1} \geq \boldsymbol{x}_{\nu 2} \geq ... \geq \boldsymbol{x}_{\nu n} \tag{5.15}$$

という並びが決まる。これは等号が成り立つ要素間の順序の任意性を除けば、一意である。その順に従い、新たに番号を付け替え、

$$(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, ..., \boldsymbol{x}'_n) = (\boldsymbol{x}_{\nu 1}, \boldsymbol{x}_{\nu 2}, ..., \boldsymbol{x}_{\nu n}) \tag{5.16}$$

とする事ができる。この作業を整列と呼ぶ。このようにして、 $m \times n$ 行列から $m \times n$ 行列への写像 $Sort$ を

$$Sort(X) = X', X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n), X' = (\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, ..., \boldsymbol{x}'_n), \tag{5.17}$$

とおく。さらに $m \times n$ 行列なんらかのノルムを導入する。ここでは

$$||(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)|| = \sqrt{|\boldsymbol{x}_1|^2 + |\boldsymbol{x}_2|^2 + ... + |\boldsymbol{x}_n|^2}), \tag{5.18}$$

とし、

$$D = ||Sort(X) - Sort(T(X'))||, \tag{5.19}$$

を考える。距離 D は系の粒子の入れ替えに対し不変であり、 D を用いてスキュタレ法を適用する事により、場の考え方を用いずに粒子の個別性を排除した対称性を扱う事ができる。 D という値は全順序の導入方法によって異なり、また、その物理的意味の解釈は難しいが、 D が 0 であるとき、T に関する粒子の個別性を排除した対称性は完全に保たれており、 D が 0 であればその対称性が破られている。その意味で一種のオーダーパラメータとなり得る。

第 6 章

まとめと今後の課題

本研究では時系列からの UPO の抽出という問題に対し、スキュタレ法という方法を提案した。この方法と Lathrop らによる先行研究との異なる点は全時系列中における軌道上の二点間の距離の最小値である D_{min} に着目し、その D_{min} の極小値（谷）が UPO と対応していると考える点である。スキュタレ法が双曲力学系に対し有効である事を示すためレスラーモデルとローレンツモデルの二つの力学系によって作られるカオス時系列に対して適用し、その結果、近似的な UPO の検出に成功した。さらに得られた近似的な UPO に対して高精度化を施し、レスラーモデルの UPO に関する先行研究 (Galias 2007) による結果との整合性を確かめた。また、スキュタレ法適用の際に得られる D_{min} の谷の形状は UPO・不安定固定点の特性乗数、軌道速度といった系の情報を含んでおり、これらの情報を元に D_{min} のグラフの評価を行った。また、スキュタレ法を対称性を持つ力学系に対して一般化し、多粒子系に対する拡張を行った。

本論文ではシミュレーションによって作成された時系列に対し解析を行ったが、実験的に得られた時系列に対してスキュタレ法を適用する場合においては、観測誤差やノイズが検出精度にどの程度影響を及ぼすのか調べる必要がある。他にも、時系列のデータの大きさ、すなわち観測時間によって、結果がどのように変化するのか調査する価値がある。これらの問題は今後の課題とする。

謝辞

本論文を作成するにあたり、熱心なご指導を頂き、支えになって頂いた水口 毅氏に深謝いたします。また、ご多忙の中、数々のアドバイスを与えてくださった福田先生・大同先生・堀田先生、そして学生生活において多くの喜びを共有した研究室の皆様に心より感謝申し上げます。最後に、家族の支えがあって学生生活を充実したものにする事ができ、６年間の成果をこのような形にすることができました。本当にありがとうございました。

参考文献

[1] K.Pyragas, Phys.Lett. **170** 428, (1992).

[2] T.Ushio, IEEE Trans.CAS-I, **43** 815, (1996).

[3] 小林 幹, 修士論文 大阪府立大学 (2005).

[4] Y.Ueda,H.Nakajima, Phys. Rev. E **58**, 1757, (1998).

[5] E.Ott, *Chaos in Dynamical Systems*,2nd ed.(Cambridge University Press, Cambridge, England, 2002).

[6] G.Kawahara and S.Kida, J.Fluid Mech. **449**, 291, (2001).

[7] D.P.Lathrop and E.J.Kostelich, Phys. Rev. A **40**,4028, (1989).

[8] Z.Galias, Int.J.Bifurcation and Chaos. **16**, 2873, (2006).

[9] F.Takens, Detecting strage attractors in turebulance, Lecture Notes in Mathematics, Vol.898,366 (Springer-Varlag,1980).

[10] E.N.Lorenz, Journal of the At iospheric Sciences, **20** 130, (1963).

[11] O.E.Rössler, Phys.Lett. **57 A**, 397, (1976).

[12] P.So, E.Ott, S.J.Schiff, D.T.Kaplan, T.Sauer, and C.Grebogi, Phys. Rev. Lett. **76**, 4705, (1996).

付録 A

スキュタレの由来について

紀元前５世紀のギリシアの都市国家スパルタでスキュタレ (Scytale) 暗号と呼ばれる暗号法が用いられていたと言われている。スキュタレ暗号は棒（スキュタレ）と紐を使った暗号方式であり、一定の半径を持つ棒に紐を巻きつけ、棒の軸方向に文字列を書く事により暗号化を行われる。この時、紐の方向にはランダムに見える文字列が描かれる事になるが、同じ半径の棒を持つ者であれば、再度紐を巻きつける事により複合化する事ができる。我々は UPO の周期をスキュタレ暗号で用いる棒の半径に見立て、本研究で提案した方法にスキュタレ法と名付けた。

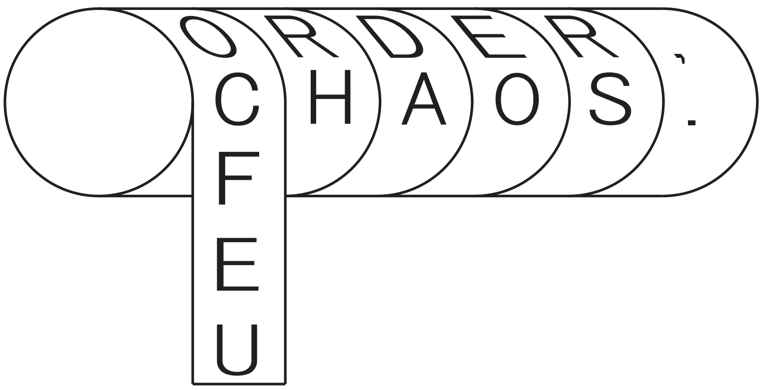

図 A.1: スキュタレ暗号における復号化の図。紐を棒に巻きつけると意味のある文字列が現れる。