対称空間とカンドル入門 *

田丸 博士 (大阪公立大学)

概要

対称空間は, 各点において点対称をもつ空間である. カンドルは, 結び目に由来する条件をみたす二項演算をもつ集合である. 点対称を二項演算に読み替えることにより, 対称空間はカンドルとなる. この講義では, それぞれの定義を述べ, 典型的な例を紹介する.

1　イントロ

対称空間は, 多様体版やリーマン多様体版など, 様々な場合があるが, まずは最も基本的な “集合としての” 対称空間の定義を述べる.

定義 1.1. X を集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ とする. このとき (X, s) が (集合としての) <u>対称空間</u> とは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$;

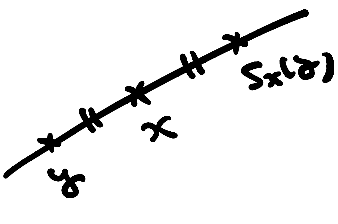
(S2) $\forall x \in X,\ s_x^2 = \mathrm{id}.$;

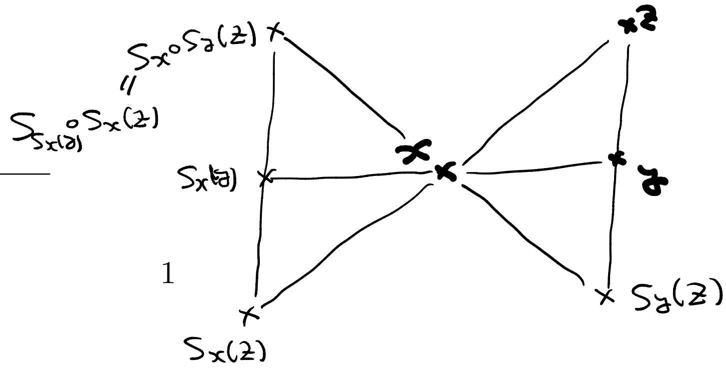
(S3) $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

写像 $s_x : X \to X$ を x における点対称という. すなわち, 対称空間とは, 各点において “点対称” をもつ空間である.

例 1.2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上に点対称を $\underline{s_x(y) = 2x - y}$ で定めたものは対称空間.

$$\frac{S_x(y) + y}{2} = x$$





* 2023 年度「数学概論」講義資料

もう一方の登場人物はカンドルである．カンドルは, 所定の性質をみたす二項演算をもつ集合として定義される．

定義 1.3. X を集合, $* : X \times X \to X$ とする．このとき $(X, *)$ が <u>カンドル</u> (<u>**quandle**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$;

(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists 1 z \in X : z * x = y$;

(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルの概念は, 結び目の研究の課程で導入されたものである．実際, これら三条件は結び目の Reidemeister 変形と対応する (本講義では踏み込まないが).

命題 1.4. (X, s) を (集合としての) 対称空間とする．このとき, $x * y := s_y(x)$ によって二項演算 $*$ を定めると, $(X, *)$ はカンドルである．

証明は直接計算．ちなみに, 対称空間の条件 (S2) を "$\forall x \in X$, s_x は全単射" に緩めると, カンドルと同値になる．ということで以下では, カンドルも (X, s) で表すこととする．このときの $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ をカンドル構造と呼ぶ．

問題 1.5 (自習用)**.** 命題 1.4 を示せ．

(Q2) $\iff \forall x, y \in X,\ \exists^1 z \in X : s_x(z) = y$

$\iff \forall x \in X,\ s_x$: 全単射

$\left(\Uparrow \quad s_x^2 = id \right)$

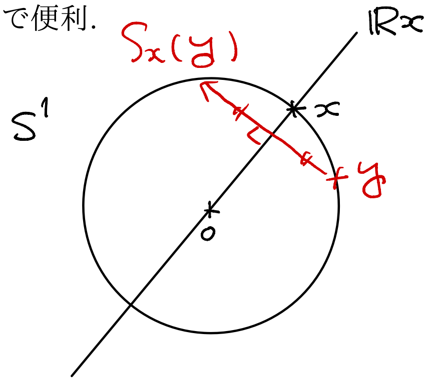
2　対称空間の例

対称空間の典型的な例を挙げる．ここで紹介する例は, 全てコンパクトなリーマン対称空間になっているが, 集合としての側面のみを紹介する．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準的な内積を $\langle , \rangle$ で表す.

例 2.1. 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ は次により対称空間:

$$s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x.$$

ちなみにこの s_x は, 直線 $\mathbb{R}x$ に関する "折り返し" を意味する．すなわち, $y = \pm x$ のとき $s_x(y) = y$ であり, また $y \perp x$ のとき $s_x(y) = -y$ である．条件 (S1), (S2) の確認は容易．条件 (S3) も直接計算で証明できるが, 折り返しに関する一般的な命題を用意しておくと後で便利.



- $S_x(x) = -x + 2\underbrace{\langle x, x\rangle}_{=1} x = x$
- $\langle x, y\rangle = 0$
  $\Rightarrow S_x(y) = -y$

問(宿題)

(S3) を直接示せ。

ここで折り返しに関する一般的な命題を用意しておく．直交群を用いる:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{O}(n) &:= \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\} \\
&= \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle\}.
\end{aligned}
$$

(Note : $\langle v, w\rangle = {}^t v \cdot w$)
だった、

命題 2.2. V を $\mathbb{R}^n$ 内の線型部分空間とし, V に関する折り返し $r_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次で定義する: $r_V(v + w) := v - w$, ただし $v \in V$, $w \in V^\perp$. このとき以下が成り立つ:

(1) $r_V^2 = \mathrm{id}.$;

(2) $r_V \in \mathsf{O}(n)$;

(3) $\forall g \in \mathsf{O}(n)$, $g \circ r_V = r_{g(V)} \circ g$.

命題の主張 (2) を示すためには, 内積を保つことを言えば良い．主張 (3) は, V 上と $V^\perp$ 上で両辺の写像が一致することを示せば良い．また, この命題を用いれば, 球面 S^n が対称空間となることが容易に証明できるだろう．

∵ (1) 明らか.

(2) [示すこと: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle r_V(x), r_V(y)\rangle = \langle x, y\rangle$]

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ をとる. $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ とおく
($x_1, y_1 \in V$, $x_2, y_2 \in V^\perp$)

$$
\begin{aligned}
\langle r_V(x), r_V(y)\rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \\
&= \langle x_1, y_1\rangle + \langle +x_2, +y_2\rangle \\
&= \langle x, y\rangle \quad //
\end{aligned}
$$

(3) $\forall g \in \mathsf{O}(n)$ をとる.

[示すこと: $g \circ r_V = r_{g(V)} \circ g$]
i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g \circ r_V(x) = r_{g(V)} \circ g(x)$]

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ をとる.

$x = \underset{V}{x_1} + \underset{V^\perp}{x_2}$ とおく.

$g \circ r_V(x_1) = g(x_1)$

$r_{g(V)} \circ \underbrace{g(x_1)}_{g(V)} = g(x_1)$ "

x_2 も同様 $\boxed{//}$

対称空間の次の例として, 実グラスマン多様体を挙げる (多様体構造には触れないが). 実グラスマンは, 実射影空間の一般化である.

例 2.3. $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間 $\}$ を <u>実グラスマン</u> とよぶ. この $G_k(\mathbb{R}^n)$ は次により対称空間: $s_V(W) := r_V(W)$ (すなわち, 折り返し r_V で W を移したときの像).

証明は, 先の命題 2.2 から容易であろう. また, 定義から $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (n 次元実射影空間) であることに注意しておく. 点対称の感覚を掴むために, 次の例を見ておく. ここで, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ で張られるベクトル空間を, 記号の簡略化のために次のように書く:

$$(x_1, \ldots, x_k) := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

また $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする.

例 2.4. $G_2(\mathbb{R}^6)$ に対して, $V_0 := (e_1, e_2)$ における点対称は以下をみたす:

(1) $s_{V_0}(e_1, e_3) = (e_1, e_3)$;
(2) $s_{V_0}(e_1, e_2 + e_3) = (e_1, e_2 - e_3)$.

$$s_{V_0}(e_1, e_3) = (\underbrace{r_{V_0}(e_1)}_{=e_1}, \underbrace{r_{V_0}(e_3)}_{=-e_3})$$
$$= (e_1, -e_3) = (e_1, e_3)$$

$$s_{V_0}(e_1, e_2 + e_3)$$
$$= (\underbrace{r_{V_0}(e_1)}_{=e_1}, \underbrace{r_{V_0}(e_2 + e_3)}_{=e_2 - e_3})$$
$$= (e_1, e_2 - e_3).$$

3　その他の例: 有向実グラスマン

ちなみにグラスマンには, 複素グラスマンなどのバリエーションもいくつかある．ここでは, その一つとして, 有向実グラスマンを紹介しよう．

定義 3.1. $V \in G_k(\mathbb{R}^n)$ とし, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ と $\{w_1, \ldots, w_k\}$ を V の順序付き基底とする．これらが <u>同じ向き</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists g \in \mathsf{GL}(k, \mathbb{R}) : \det(g) > 0$ かつ $(v_1, \ldots, v_k) = (w_1, \ldots, w_k)g$.

順序付き基底の集合において, 同じ向きという関係は同値関係である．その商集合の元を $[(v_1, \ldots, v_k)]$ のように表し, V の <u>向き</u> とよぶ．当然ながら, 向きは 2 個しかない (表と裏, あるいは正と負, と考えられる).

例 3.2. $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim := \{(V, \sigma) \mid V \in G_k(\mathbb{R}^n),\ \sigma \text{ は } V \text{ の向き }\}$ を <u>有向実グラスマン</u> とよぶ．この $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ は折り返し r_V によって対称空間となる．

折り返しは, 部分空間を向きも込めて折り返す．式で書くと

$$\begin{aligned} &s_V(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \ldots, w_k\}, [(w_1, \ldots, w_k)]) \\ &= (r_V(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \ldots, w_k\}), [(r_V(w_1), \ldots, r_V(w_k))]). \end{aligned}$$

例 3.3. $G_2(\mathbb{R}^6)^\sim$ を考える．記号の簡略化のため $(x_1, x_2) := (\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x_1, x_2\}, [(x_1, x_2)])$ と表し, その向きを反転させたものを $-(x_1, x_2)$ を書く．このとき以下が成り立つ:

(1) $s_{(e_1,e_2)}(e_1, e_3) = (e_1, -e_3) = -(e_1, e_3)$;

(2) $s_{(e_1,e_2)}(e_3, e_4) = (-e_3, -e_4) = (e_3, e_4)$.

$$s_{(e_1,e_2)}(e_1, e_3) = \left((e_1, -e_3), [(e_1, -e_3)]\right)$$

$$(e_1, e_3) = (e_1, -e_3)\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$\det = -1$

$$= -(e_1, e_3)$$

$$s_{(e_1,e_2)}(e_3, e_4) = (-e_3, -e_4) = (e_3, e_4)$$

$$(e_3, e_4) = (-e_3, -e_4)\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$\det = 1$

対称空間の場合は多様体になるものを考えることが多いが, カンドルの場合には有限なものも扱う. ここでは, グラスマン内の有限部分集合として与えられるカンドルの例を紹介する. 以下を考える:

$$
\begin{aligned}
A(k,n) &:= \{(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}, \\
A(k,n)^{\sim} &:= \{\pm(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}.
\end{aligned}
$$

命題 3.4. $A(k,n)$ および $A(k,n)^{\sim}$ は以下をみたす:

(1) $A(k,n)$ の上で点対称は自明 (すなわち $\forall V, W \in A(k,n)$, $s_V(W) = W$).

(2) $A(k,n)^{\sim}$ は点対称で閉じる (すなわち $\forall V, W \in A(k,n)^{\sim}$, $s_V(W) \in A(k,n)^{\sim}$).

(3) $A(k,n)^{\sim}$ 上の点対称は可換 (すなわち $\forall V, W \in A(k,n)^{\sim}$, $s_V \circ s_W = s_W \circ s_V$).

一般に, カンドル内の部分集合に対して, 点対称が自明ならば可換である.

問題 3.5 (レポート問題)**.** $A(1,2)$ は $G_1(\mathbb{R}^2)$ 内において, 点対称が可換な部分集合であるが, 点対称が可換な部分集合としては極大でないことを示せ.

ちなみに $A(1,2)$ は $G_1(\mathbb{R}^2)$ 内において, 点対称が自明な集合としては極大である.