第 1 章

対称空間とカンドル入門

本章では, 多様体構造などは一切仮定せずに, 集合としての対称空間を定義し, その例と性質を紹介する. 実際には, 集合としての対称空間の一般化であるカンドルを扱う. ここでの主結果は, 等質なカンドルと "カンドル組" との間の対応である.

1.1 定義と例

集合 X から X 自身への写像全体の成す集合を $\mathrm{Map}(X, X)$ で表す.

定義 1.1 写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考える. このとき, (X, s) が **対称空間** であるとは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$,

(S2) $\forall x \in X$, $s_x^2 = \mathrm{id}$.

(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

注意 1.2 上記の条件 (S2) を次に置き換えたものを **カンドル** と呼ぶ:

(S2)' $\forall x \in X$, s_x は全単射.

例 1.3（自明な対称空間） 任意の集合 X は, 次の s によって対称空間となる: $s_x := \mathrm{id}$ $(\forall x \in X)$.

例 1.4 $\mathbb{R}^n$ は, 次の s によって対称空間となる: $s_x(y) := 2x - y$.

例 1.5 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ は, s_p を "軸 op に関する折り返し" で定義することにより, 対称空間となる. 式で書くと,

$$s_p(x) := 2\langle x, p \rangle p - x.$$

問題 1.6（レポート問題 1） 例 1.5 の s について $s_p \in \mathrm{O}(n+1)$ を示せ. また, これを用いて s が (S3) をみたすことを示せ.

例 1.7（正四面体カンドル） $X := \{1,2,3,4\}$ は, 次の s によりカンドルとなる:

$$s_1 := (234), \quad s_2 := (143), \quad s_3 := (124), \quad s_4 := (132).$$

1.2　群作用 (復習)

ここでは, 群作用の定義と例を復習する.

定義 1.8 写像 $\Phi : G \times M \to M$ に対して, $g.p := \Phi(g,p)$ と表す. 写像 Φ が G の M への **群作用** であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して，$(gh).p = g.(h.p)$.

(ii) 任意の $p \in M$ に対して，$e.p = p$.

群 G が集合 M に作用することを，記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

例 1.9 以下は群作用である：

(1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g,v) \mapsto gv$.

(2) 同じ写像により, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$.

ここで $\mathrm{O}(n)$ は直交群であり, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積 $\langle , \rangle$ と次の関係がある:

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n) &:= \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\} \\ &= \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \langle g(\cdot), g(\cdot) \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle\}.\end{aligned}$$

例 1.10 $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は k 次元線型部分空間 $\}$ を **実グラスマン多様体** と呼ぶ. 次は群作用：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n) : (g,V) \mapsto g.V := \{gv \mid v \in V\}$.

ここまでの群作用の例は, 全て行列の積を用いて定義されるものであった. そうではない例も存在することを注意しておく.

例 1.11 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を **上半平面** と呼ぶ. このとき，次で定める写像によって $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ (ここで $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ でないことに注意):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

1.3　推移的な作用と等質な集合

推移的な群作用をもつ集合を等質集合と呼ぶ. ここでは, 等質集合であることと, 剰余集合の形で書けることが同値であることを示す.

1.3.1　推移的な作用

まずは, 推移的な作用および等質集合について紹介する.

定義 1.12　G を群, M を集合とする. $G \curvearrowright M$ が **推移的** であるとは, 次が成り立つこと：$\forall p, q \in M$, $\exists g \in G : g.p = q$. またこのとき, M は G に関して **等質** であるという.

補題 1.13　$o \in M$ を固定する. このとき, 群 G の M への作用が推移的であることは次と同値：任意の $p \in M$ に対して, $g \in G$ を上手く選ぶと, $g.o = p$.

例 1.14　以下の作用は推移的である:

(1)　$n \geq 1$ のとき, $\mathrm{O}(n+1), \mathrm{SO}(n+1) \curvearrowright S^n$.
(2)　$k \in \{1, \ldots, n-1\}$ のとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$.
(3)　$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $S \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, ただしここで,

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

上記の証明では, それぞれの集合において, 一番小さい群の作用について示せば十分である. また, (1), (2) の証明には次を使う: $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ (縦ベクトル) に対して, $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{O}(n)$ であるための必要十分条件は, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が正規直交基底であること.

1.3.2　剰余集合

次に, 剰余集合について紹介する. 剰余集合は, G/K という形で表される集合である.

定義 1.15　G を群とし, K をその部分群とする. 次で定義される G 上の同値関係 $\sim$ を K **による同値関係** と呼ぶ：$g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$.

ここで定義した関係 $\sim$ が同値関係であることは, 容易に確かめられる. また, $g \in G$ を含む同値類を $[g]$ で表すと, 次が成り立つ：

$$[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}.$$

定義 1.16　群 G を部分群 K による同値関係で割った商集合を G/K で表し，G の K による **剰余集合** と呼ぶ.

簡単な例として, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が挙げられる．ちなみにこの剰余集合は, 円 S^1 と同一視できる.

1.3.3　等質集合の性質

次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 1.17　集合 M が G に関して等質であることと, $M = G/K$ と書けることは同値.

この定理を証明するためには, 以下の二つの命題を示せば良い.

命題 1.18　K を G の任意の部分群とする．このとき, G/K は G に関して等質である. 特に, 次により G は G/K に推移的に作用する: $g.[h] := [gh]$.

命題 1.19　M が G に関して等質であるとし, $p \in M$ とする．このとき, 次の写像は全単射である: $G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$.

ただしここで $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$．これを G の p における固定部分群という.

問題 1.20（**レポート問題** 2）　命題 1.19 の証明の「全射」「単射」のうち, M の等質性が必要となる方に証明を与えよ.

1.4　等質な集合の例

等質な集合 M を G/K の形で書くことを等質空間表示という．等質空間表示を求めるためには, 推移的に作用する群 G と, ある点 $p \in M$ での固定部分群 G_p を求めれば良い. この基準となる点 p の取り方によって, G_p は (本質的には同じだが) 形が変わるので, できるだけ簡単な点を選ぶと良い.

例 1.21　$n \geq 1$ とする．このとき，球面 S^n は以下の等質空間表示を持つ：

$$\begin{aligned} S^n &= \mathrm{O}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \\ &= \mathrm{SO}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{SO}(n) \right\}. \end{aligned}$$

このように, 等質空間表示は一意的ではない．特に, 異なる群が推移的に作用することがある, という点は強調しておく.

例 1.22　以下において，行列のブロック分割のサイズは $(k, n-k)$ であるとする．グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\left\{\left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det \neq 0\right\} \\ &= \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\left\{\left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det = 1\right\} \\ &= \mathrm{O}(n)/\left\{\left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k)\right\} \\ &= \mathrm{SO}(n)/\left\{\left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k),\ \det(\alpha)\det(\beta) = 1\right\}. \end{aligned}$$

例 1.23　上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) = S/\{e\}.$$

例 1.24　$\mathfrak{M} := \{\langle,\rangle : \mathbb{R}^n$ 上の内積 $\}$ とする．このとき，

(1)　次による $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}$ は推移的: $g.\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot)\rangle$.

(2)　$\mathfrak{M} = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

1.5　等質カンドル

カンドルが等質とは, 自己同型群が推移的に作用することと定義する. ここでは, これを説明するために必要となる用語や例を紹介する.

定義 1.25　(X, s^X), (Y, s^Y) をカンドルとする. 写像 $f : X \to Y$ が **準同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f$.

命題 1.26　準同型写像と準同型写像の合成は準同型である. また, 準同型写像が全単射の場合には, 逆写像も準同型である.

全単射な準同型写像を **同型写像** と呼ぶ. 上の命題から, 次が群になることが従う.

定義 1.27　カンドル (X, s) に対して, 次を **自己同型群** と呼ぶ.

$$\mathrm{Aut}(X, s) := \{f : X \to X : \text{同型写像}\}.$$

例 1.28　任意の $x \in X$ に対して, 次が成り立つ: $s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

定義 1.29　カンドル (X, s) が **等質** とは, $\mathrm{Aut}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

例 1.30　(X, s) を自明な対称空間とする. このとき, 任意の全単射 $f : X \to X$ は自己同型である. よって, (X, s) は等質.

例 1.31　$\mathbb{R}^n$ を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の平行移動および線型同型写像は自己同型である. よって, $\mathbb{R}^n$ は等質.

問題 1.32 **(レポート問題 3)**　例 1.31 の $(\mathbb{R}^n, s)$ において, 任意の線型同型写像は自己同型であることを示せ.

例 1.33　S^n を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の $g \in \mathrm{O}(n+1)$ は自己同型として作用する. よって, S^n は等質.

注意 1.34 **(おまけ)**　カンドル (X, s) に対して, 各点の s_x 達で生成される群 ($\mathrm{Aut}(X, s)$ 内の部分群) を **内部自己同型群** とよぶ. また, 内部自己同型群が推移的に作用するカンドルは **連結** であるという. 定義より連結ならば等質だが, 逆は成り立たない. 単位円 S^1 の n 等分点の集合は, S^1 の点対称を制限することによってカンドルとなる (二面体カンドルといい, R_n で表す). 二面体カンドル R_n は常に等質だが, 連結であるための必要十分条件は n が奇数であること.

1.6　等質カンドルとカンドル組

等質な集合 M は G/K の形で書くことができた．ここでは, これが等質なカンドルあるいは対称空間となるための (G,K) の性質を述べる．

定義 1.35　G を群, K を G の部分群とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする．このとき,

(1)　(G,K,σ) が **カンドル組** とは, 次が成り立つこと: $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma,G)$.

(2)　(G,K,σ) が **対称対** とは, 次が成り立つこと: $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma,G)$.

ここで, 対称対 (symmetric pair) は定着した用語だが, カンドル組は未定着であることに注意しておく．次の定理を紹介することが, この節の目標.

定理 1.36　等質なカンドル (対称空間) は, カンドル組 (対称対) と対応する．

この定理の正確な主張は, 以下の命題に分けて述べる．まずは, 等質なカンドルからカンドル組を構成する．

命題 1.37　(X,s) を等質カンドル (対称空間) とする．このとき, 以下の (G,K,σ) はカンドル組 (対称対):

$$G := \mathrm{Aut}(X,s), \quad p \in X, \quad K := G_p, \quad \sigma : G \to G : g \mapsto s_p \circ g \circ s_p^{-1}.$$

次に, カンドル組から等質なカンドルを構成する．

命題 1.38　(G,K,σ) をカンドル組 (対称対) とする．このとき, 次の s により G/K は等質なカンドル (対称空間) になる: $s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$. 特に $G \subset \mathrm{Aut}(G/K,s)$.

自然に $G \curvearrowright G/K$ ($g.[h] := [gh]$ により) だったことに注意.

問題 1.39（レポート問題 4）　命題 1.38 の s が well-defined であることを示せ.

注意 1.40　上で定義した s は, 次のように考えると意味が分かりやすい:

(1)　原点 $[e]$ では次のように定めている: $s_{[e]}([h]) = [\sigma(h)]$.

(2)　他の点 $[g]$ には, g の作用を使ってばらまいている: $s_{[g]} = g \circ s_{[e]} \circ g^{-1}$.

1.7　等質な対称空間の例

等質な対称空間および対称対の例を紹介する.

例 1.41　任意の (G, K) に対して, $\sigma = \mathrm{id}$ とすると, (G, K, σ) は対称対. これから得られる対称空間は, 自明な対称空間.

以下では, 次の群を単に $\mathrm{O}(n)$ と略記することとする ($\mathrm{SO}(n)$ や $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ 等も同様に略記):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\}.$$

また, I_n を単位行列とし, 次の行列 $I_{p,q}$ を用いる:

$$I_{p,q} := \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{bmatrix}.$$

例 1.42　$\sigma(g) := I_{1,n} g I_{1,n}$ とおくと, 以下は対称対. 得られる対称空間は S^n と同型:

(1)　$(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n), \sigma)$.

(2)　$(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n), \sigma)$.

例 1.43　$(\mathrm{O}(p+q), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q), \sigma)$ は, $\sigma(g) := I_{p,q} g I_{p,q}$ とすると対称対である. 従って, 実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は対称空間になる.

例 1.44　$(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ は, $\sigma(g) := {}^t g^{-1}$ とすると対称対である. 特に $n = 2$ のときを考えると, 上半平面は対称空間.

例 1.45　$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \sigma)$ は, 上と同じ σ により対称対である. 得られる対称空間は "$\mathbb{R}^n$ 上の正定値内積全体の集合" と同一視できる.

例 1.46　群 G に対して, $(G \times G, \mathrm{diag}(G), \sigma)$ は, $\sigma(a, b) := (b, a)$ とすると対称対である. 得られる対称空間は G に次の点対称を入れたものと一致する: $s_g(h) := g h^{-1} g$.

例 1.47　群 G と群自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し, $(G, \{e\}, \sigma)$ はカンドル組である. 得られるカンドルを **(一般化) Alexander カンドル** という.

第 2 章

リー代数

ここでは, リー代数の基本的な事項を紹介する. 特に, 後の議論で用いられるルート系や岩澤分解などに主眼を置き, その具体例を行列を使って記述する.

2.1　リー代数の定義

リー代数の定義と簡単な例を復習する.

定義 2.1　$\mathfrak{g}$ を実線型空間とし, $[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線型写像とする. このとき $(\mathfrak{g}, [,])$ が **リー代数** とは, 以下が成り立つこと:

(i)　$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(ii)　$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

リー代数を単に $\mathfrak{g}$ で表すことも多い. 次が最も典型的な例.

例 2.2　$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M(n, \mathbb{R})$ は次によってリー代数: $[X, Y] := XY - YX$.

リー代数の例を与える一つの方法は, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分代数として与える方法である.

定義 2.3　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする. $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **リー部分代数** とは, 次が成り立つこと:

(i)　$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(ii)　$\forall X, Y \in \mathfrak{g}'$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

容易に分かるように, リー部分代数はリー代数である.

例 2.4　以下は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のリー部分代数:

(1)　$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

(2)　$\mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R}) \mid {}^tX I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$.

2.2　階別リー代数

本節では階別リー代数を紹介する．これを知っていると，今後に登場するリー代数に関する概念や性質の見通しがよくなることが多い．なお，階別 Lie 代数は graded Lie algebra の直訳のつもりで使っているが，次数付き Lie 代数と呼ばれることもある．

定義 2.5　線型空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **階別 Lie 代数** であるとは，次が成り立つこと：$[\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^q] \subset \mathfrak{g}^{p+q}$ $(\forall p, q \in \mathbb{Z})$.

便宜的に $k \in \mathbb{Z}$ と書いているが，本稿では有限次元リー代数を主に念頭においているので，実際には有限の範囲に収まる．

定義 2.6　階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **第 ν 種** であるとは，次が成り立つこと：

(i)　$\mathfrak{g}^\nu \neq 0$,

(ii)　$|p| > \nu$ ならば $\mathfrak{g}^p = 0$.

例 2.7　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$) に対して，次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える：

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline * & & \\ * & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & * & * \\ & * & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline & & \\ & & \end{array} \right) \right\}$$

例 2.8　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$) に対して，次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える：

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ \hline * & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & * \\ & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}$$

例 2.9　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$) に対して，次は第 2 種の階別 Lie 代数を与える：

$$\mathfrak{g}^{-2} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline * & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline * & & \\ \hline & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} * & & \\ \hline & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & * & \\ \hline & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{2} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & * \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}.$$

命題 2.10　上と同様に，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$) をブロック分割することにより，階別 Lie 代数を構成することができる．

2.3　階別リー代数の構成方法

以下では $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すものとする.

定義 2.11　写像 $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **微分写像** であるとは, 以下が成り立つこと:

(i)　D は線型;

(ii)　$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $D([X,Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)]$.

微分写像全体の集合を $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ とかき, **微分代数** とよぶ. 微分代数は, 写像の交代積 ($[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$) に関してリー代数になる.

例 2.12　各 $X \in \mathfrak{g}$ に対し, 次は微分写像: $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : Y \mapsto [X, Y]$.

上で定義された ad_X を **随伴写像** という.

命題 2.13　微分写像 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が 対角化可能であり, 全ての固有値が整数であるとする. このとき, 次によって階別リー代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が得られる:

$$\mathfrak{g}^k := \{X \in \mathfrak{g} \mid D(X) = kX\}.$$

逆に, 全ての階別リー代数はこの方法で得られる.

特に階別リー代数が ad_Z という形の微分写像で与えられているとき, このような $Z \in \mathfrak{g}$ を, 階別リー代数の **特性元** と呼ぶ.

例 2.14　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対して, 次は階別リー代数の特性元である:

$$Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

ちなみに, 特性元の整数倍も特性元となるが, それらから得られる階別リー代数は同じものとみなすことが多い.

例 2.15　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ に対して, 次の元の整数係数一時結合は, 階別リー代数の特性元:

$$H^1 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

問題 2.16（レポート問題 5）　上の H^1 が特性元であることを示せ. また, H^1 から得られる階別リー代数を書け.

実は, 半単純リー代数に対しては, このような特性元を用いた方法で全ての階別リー代数が得られることが分かっている.

2.4　Levi 分解

ここではリー代数の Levi 分解の主張を述べる．必要な用語と具体例を紹介することを目標とするため, 証明には踏み込まない.

定理 2.17（Levi **分解**）　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{r}$ と半単純部分代数 $\mathfrak{s}$ が存在し, $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ (ベクトル空間の直和) が成立する.

上の直和は, リー代数の直和 (自然に定義できる) ではないことに注意する．すなわち $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] = 0$ とは限らない．以下で述べるイデアルの定義により $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$ が成り立つ.

2.4.1　部分代数とイデアル

まずは部分代数とイデアルを定義する．これらについては, 代数の講義等で登場したものから想像できると思われる.

定義 2.18　$\mathfrak{g}$ をリー代数, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ を線型部分空間とする．このとき,

(1)　$\mathfrak{g}'$ が **部分代数** (subalgebra) とは, 次が成り立つこと: $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$;

(2)　$\mathfrak{g}'$ が **イデアル** (ideal) とは, 次が成り立つこと: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$.

全てのリー代数に対して $\{0\}$ および $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．これらを自明なイデアルという．非自明な例として以下を挙げる.

例 2.19　以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ において $\mathfrak{o}(n)$ は部分代数だがイデアルでない;

(2)　以下で与えられる $\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ は $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 内の部分代数だがイデアルでない:

$$\mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & * \\ & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\};$$

(3)　上記の $\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ において, $\mathfrak{g}^0$ は部分代数だがイデアルではない, $\mathfrak{g}^1$ はイデアル.

(4)　リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はイデアル (これを **導来イデアル** という).

問題 2.20（**自習用**）　$\mathfrak{g}$ をリー代数に対し, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ を $\mathfrak{g}$ の **中心** という．中心はイデアルであることを示せ．また, 上の例の $\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$, $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{g}^1$ の中心をそれぞれ求めよ.

2.4.2 可解リー代数と冪零リー代数

Levi 分解の主張を理解するためには, リー代数の可解性と半単純性を定義する必要がある. まずは可解性から述べる. ちなみに可解性は冪零性と深く関係する.

定義 2.21 $\mathfrak{g}$ をリー代数とする.

(1) $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $D^k\mathfrak{g} := D(D^{k-1}\mathfrak{g})$ で定義される列を **導来列** という;
(2) $\mathfrak{g}$ が **可解** (solvable) とは次が成り立つこと: $\exists r : D^r\mathfrak{g} = 0$;
(3) $C^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$, $C^k\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^{k-1}\mathfrak{g}]$ で定義される列を **降中心列** という;
(4) $\mathfrak{g}$ が **冪零** (nilpotent) とは次が成り立つこと: $\exists r : C^r\mathfrak{g} = 0$.

導来列は derived seriese, 降中心列は descending central series というが, 覚える必要はない. 冪零リー代数に対して, $C^r\mathfrak{g} = 0 \neq C^{r-1}\mathfrak{g}$ となるときに r**-step** であるという. 次は定義から直ちに従う.

命題 2.22 リー代数は冪零なら可解である. 冪零リー代数の部分代数は冪零であり, 可解リー代数の部分代数は可解である.

例 2.23 以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k>0} \mathfrak{g}^k$ の形の階別リー代数は冪零;
(2) 狭義の上三角行列の成すリー代数は冪零;
(3) 広義の上三角行列の成すリー代数は, 可解だが冪零ではない;
(4) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ は可解でない (導来イデアルが全体と一致する).

ちなみに, 行列のブロック分解の上三角部分 (すなわち $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の対応する階別リー代数の $\bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^k$) は一般には可解ではない. 実際, $(r \times r)$-サイズのブロックが対角部分にあったとすると, その中に $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{R})$ が部分代数として含まれるが, これは可解ではない.

命題 2.24 リー代数 $\mathfrak{g}$ が可解であるための必要十分条件は, 導来イデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が冪零となること.

具体的に与えられたリー代数が可解であることを判定する際には, この命題を用いる方が簡単な場合を多い. 証明については, ($\Leftarrow$) 方向は難しくないが, 反対方向の ($\Rightarrow$) を示すためにはいろいろと準備が必要になる (ので省略する).

2.4.3　半単純リー代数

ここでは半単純リー代数の定義と例を紹介する．

定義 2.25　リー代数 $\mathfrak{g}$ が **単純** とは, $\dim \mathfrak{g} > 1$ かつ非自明なイデアルをもたないこと．

例 2.26　$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ は単純リー代数である．

上の例は, 真面目に証明をすると大変だが, 一度はやっておくのが良いだろう．階別リー代数を用いると, 多少だが議論の見通しがよくなる．本講義では, 他には $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{o}(p, q)$ といった半単純リー代数が登場する予定である．

例 2.27　3×3 の狭義上三角行列の成すリー代数を 3 **次元 Heisenberg 代数** と呼び, $\mathfrak{h}^3$ で表す．これは単純ではない．

定義 2.28　$\mathfrak{g}$ が **半単純** であるとは, 単純リー代数の直和として書けること．

命題 2.29　$\mathfrak{g}$ が半単純ならば $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ が成り立つ．従って可解ではない．

2.4.4　Levi 分解の例

ここでは Levi 分解の簡単な具体例を紹介する．

例 2.30　以下で与えられる $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ を考える:

$$\mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & * \\ & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}.$$

このとき $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ と Levi 分解できる．ただしここで,

$$\mathfrak{s} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{r} := \mathrm{span}\{ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & -2 \end{array} \right) \} \oplus \mathfrak{g}^1.$$

上で与えた $\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と同型なので単純である．また $\mathfrak{r}$ は可解であり, その導来イデアルは $\mathfrak{g}^1$ と一致して冪零 (この場合は可換) である．一般に $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の階別リー代数の次数 0 以上の部分は, 同様の形で Levi 分解できる．

問題 2.31（レポート問題 6）　$\mathfrak{sl}(6, \mathbb{R})$ の $(3, 2, 1)$-サイズのブロック分割から得られる階別リー代数を考える．このときの $\mathfrak{g} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ の Levi 分解を一つ与えよ．

2.5　制限ルート系

ここでは, 半単純リー代数の Cartan 対合や制限ルート系といった概念を紹介する.

2.5.1　Killing 形式

まずはリー代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を定義し, これを用いて半単純性が判定できることを紹介する.

定義 2.32　次で定義される写像 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を **Killing 形式** と呼ぶ:

$$B(X, Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y).$$

命題 2.33　Killing 形式 B は対称双線型写像であり, 次をみたす:

$$B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

例 2.34　リー代数の Killing 形式 B について, 以下が成り立つ:

(1)　一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のとき, $B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY) - 2\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)$;

(2)　3 次元 Heisenberg 代数のとき, $B(X, Y) = 0$.

上の (1) は, $(\mathrm{ad}_X)^2 M = X^2 M - 2XMX + MX^2$ と polalization を用いる方法を紹介する. また (2) は直接計算で容易に示されるが, 同様の議論により, 冪零リー代数の Killing 形式は恒等的に 0 になる.

命題 2.35　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルを $\mathfrak{g}'$ とし, それぞれの Killing 形式を B, B' とする. このとき B' は B の制限となる, すなわち,

$$B' = B|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'}.$$

例 2.36　特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY).$$

定理 2.37　$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は, Killing 形式 B が非退化となること.

2.5.2 Cartan 分解

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする. 写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **対合** であるとは, θ が Lie 代数としての自己同型写像であり, $\theta^2 = \mathrm{id}$ をみたすこと.

定義 2.38 対合 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **Cartan 対合** であるとは, 次で定義される B_θ が正定値となること:

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta(Y)) \qquad (\text{for } X, Y \in \mathfrak{g}).$$

Cartan 対合 θ は対合なので, その固有値は ± 1 のいずれかである.

定義 2.39 Cartan 対合 θ による固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を **Cartan 分解** と呼ぶ. ただしここで, $\mathfrak{k}$ は固有値 1, $\mathfrak{p}$ は固有値 -1 に対応する固有空間である.

例 2.40 特殊線型リー代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に対して, $\theta(X) := -{}^tX$ は Cartan 対合. また, これによって得られる Cartan 分解 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n), \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X = {}^tX\}.$$

問題 2.41**(レポート問題 7)** Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が次をみたすことを示せ:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

定理 2.42 任意の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, Cartan 対合が存在する. さらに, Cartan 対合は (内部自己同型による) 共役を除いて一意である.

命題 2.43 任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して, ad_X は B_θ に関して対称である. よって ad_X は対角化可能であり, 固有値は全て実数になる.

従って $X \in \mathfrak{p}$ の中で, ad_X の固有値が全て整数になるものが存在すれば, それは階別リー代数の特性元になる. 実は, 特性元は (共役を除いて) このような形のものに限る.

注意 2.44 上に述べたことを用いて, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の階別リー代数を分類することができる. 特性元 $Z \in \mathfrak{p}$ が存在することは認める. あとは以下の手順で行う:

(1) $\mathrm{SO}(n)$ が共役によって $\mathfrak{p}$ に作用することから, Z は対角行列として良い.

(2) さらに $Z = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ を共役で移すことによって, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ であるとして良い.

(3) このような形の Z で, 固有値が全て整数になるものを求める.

これと同様の手続きを, 一般の半単純リー代数でも定式化できることを, 以下で見ていく.

2.5.3　極大可換部分代数

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする.

定義 2.45　$\mathfrak{p}$ 内の部分空間 $\mathfrak{a}$ が **極大可換** であるとは, 以下が成り立つこと:

(1)　$\mathfrak{a}$ は可換. すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{a}$, $[X, Y] = 0$.

(2)　$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ とし, $\mathfrak{a}'$ が可換部分空間のとき, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

例 2.46　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき, 次は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間:

$$\mathfrak{a} := \left\{ \sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

問題 2.47 **(レポート問題** 8**)**　上の例を $n = 3$ のときに示せ.

定理 2.48　$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間は共役を除いて一意である.

従って, 階別リー代数の特性元 $Z \in \mathfrak{g}$ を探す場合には, $Z \in \mathfrak{a}$ として良いことが分かる.

2.5.4　抽象ルート系

階別リー代数の分類を進めるためには, 「対角行列の成分の入れ替え」に相当する操作が必要である. これを説明するためにルート系を用いる. ここでは, 抽象的なルート系の概念と例を紹介する.

定義 2.49　$(V, \langle , \rangle)$ を内積付き実ベクトル空間とする. このとき Δ $(\subset V)$ が **(抽象) ルート系** であるとは, 以下が成り立つこと:

(1)　Δ は有限, $0 \notin \Delta$;

(2)　Δ は V を張る;

(3)　(整数性) $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $c_{\alpha,\beta} := 2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$;

(4)　(鏡映性) $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $\beta - c_{\alpha,\beta}\alpha \in \Delta$.

注意 2.50　通常のリー代数論で登場するルート系では, 次の性質が課される: $c\alpha \in \Delta \Leftrightarrow c = \pm 1$. この条件をみたすルート系は **被約** であるという.

例 2.51　以下は $\mathbb{R}^2$ 内の抽象ルート系である:

(A_2)　単位円 S^1 上の 6 等分点の集合;

(B_2)　$\{\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1)\}$.

2.5.5　制限ルート系

ここでは, $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, ルート系を構成する. 以下では, B を Killing 形式, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間とする. また, $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする.

定義 2.52　各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して, 次を α に対応する **制限ルート空間** と呼ぶ:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad (\forall H \in \mathfrak{a})\}.$$

定義 2.53　$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が ($\mathfrak{a}$ に関する) **制限ルート** とは, 次が成り立つこと: $\alpha \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. また, ルート全体の集合を **制限ルート系** と呼び, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ で表す.

Killing 形式 B は $\mathfrak{a}$ 上で正定値であった. これを用いて $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}^*$ を同一視することにより, $\mathfrak{a}^*$ にも内積 $\langle , \rangle$ が入る.

定理 2.54　制限ルート系 Δ は, $(\mathfrak{a}^*, \langle , \rangle)$ 内の抽象的な意味でのルート系である.

証明は略す. ルート系に慣れるためには, いくつかの具体的なリー代数の制限ルート系を実際に求めると良い. 次が恐らく最も簡単な具体例.

例 2.55　$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{a} := \{\sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0\}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間,

(2)　$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,

(3)　$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathrm{span}\{E_{ij}\}$, ただしここで $\varepsilon_i(\sum a_k E_{kk}) := a_i$,

(4)　$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$.

特に $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の場合を考えると, $\mathfrak{a}^*$ は 2 次元であり, 制限ルート系は前に挙げた A_2 に一致していることが分かる.

命題 2.56　制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対して, 次が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ は B_θ に関する直交直和分解,

(2)　$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ $(\forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\})$,

(3)　$\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(\forall \alpha \in \Delta \cup \{0\})$.

この (1) の分解を **制限ルート空間分解** と呼ぶ. ちなみに $\mathfrak{g}_\alpha$ の次元をルート α の重複度と呼ぶ. 半単純リー代数が同型であるための必要十分条件は, その制限ルート系が重複度を込めて一致することである.

問題 2.57（レポート問題 9）　$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,3) := \{X \in \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \mid {}^t X I_{1,3} + I_{1,3} X = 0\}$ を考える．このとき $\theta(X) := I_{1,3} X I_{1,3}$ は Cartan 対合である．このことを用いて, $\mathfrak{g}$ の制限ルート系およびルート空間分解を求めよ．

ルートの性質より, $Z \in \mathfrak{a}$ が特性元 (ad_Z の固有値が全て整数) となるためには, 次をみたせば良い: $\forall \alpha \in \Delta$, $\alpha(Z) \in \mathbb{Z}$.

2.5.6　単純ルート

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の階別リー代数の特性元 Z は, 上の結果より, 対角行列を考えれば良い．さらに, その成分には制約があり, 対角成分を入れ替えても良い．これらを一般化する．

定義 2.58　Δ をルート系とする．$\Delta \supset \Lambda := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ が**単純ルート系** であるとは, 次が成り立つこと:

(i)　Λ は $\mathfrak{a}^*$ の基底,

(ii)　任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, 次をみたす $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が存在する: $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r$.

定義 2.59　Δ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とし, $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in \Delta$ とする．

(1)　$\alpha \in \Delta$ が **正ルート** とは, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となること．

(2)　$\alpha \in \Delta$ が **負ルート** とは, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ となること．

(3)　$\alpha \in \Delta$ が **最高ルート** とは, 次が成り立つこと: 任意の $c'_1\alpha_1 + \cdots + c'_r\alpha_r \in \Delta$ に対して, $c_1 \geq c'_1$, $\ldots$, $c_r \geq c'_r$.

例 2.60　単純ルート系について以下が成り立つ:

(1)　(A_2) 型のとき, 間の角度 $2\pi/3$ の組が単純ルート系;

(2)　(B_2) 型のとき, $\{(1,0), (-1,1)\}$ は単純ルート系.

制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は抽象的な意味でのルート系なので, ルート系の一般論はそのまま使える．特に, 次が成り立つ．

定理 2.61　全ての制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対し, 単純ルート系が存在する．さらに, 単純ルート系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を一つ固定したとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ は, 共役で次の集合内に移すことができる:

$$\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \alpha_i(X) \geq 0 \ (\forall i)\}.$$

2.6　放物型部分代数

ここでは半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ 内の放物型部分代数に関する話題を紹介する.

2.6.1　放物型部分代数の定義

放物型部分代数の定義にはいろいろな方法があるが, ここでは階別リー代数を使って定義する.

定義 2.62　$\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする. $\mathfrak{g}$ 内の部分リー代数 $\mathfrak{q}$ が **放物型部分代数** であるとは, 次が成り立つこと: 非自明な階別リー代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が存在し, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^k$.

ここで自明な階別リー代数とは, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ で得られるもの. 以前に挙げた階別リー代数の例から, 次の例が得られる.

例 2.63　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$) のとき, 以下は放物型部分代数:

$$\mathfrak{q} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \right\}.$$

2.6.2　放物型部分代数の分類

階別リー代数は, 制限ルート系によって記述することができた. 実際, 単純ルート系の双対規基底を用いて, 特性元を与えることができる. このことを用いて分類が得られる.

定理 2.64　半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ 内の放物型部分代数の共役類と, 単純ルート系 Λ 内の真部分集合が 1:1 に対応する. 正確に述べると, 以下が成り立つ:

(1)　$\Phi \subsetneq \Lambda$ に対して, Φ で張られるルート全体を $\langle\Phi\rangle$ で表すと, 次は放物型部分代数:

$$\mathfrak{q}_\Phi := \mathfrak{g}_0 \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\langle\Phi\rangle\cup\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \Big);$$

(2)　任意の放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ に対して, $\Phi \subsetneq \Lambda$ が存在し, $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{q}_\Phi$ は共役.

ここで Δ^+ は Λ に関する正ルート全体の集合. なお, この定理の構成方法を放物型部分代数の定義としている本も多い.

例 2.65　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ のとき, Δ は A_2-型で $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ だった. 従って Λ の真部分集合は $\emptyset$, $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$ の 3 通り. 対応する放物型部分代数は上に挙げたもの.

2.6.3　放物型部分代数の分解

ここでは放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ の分解定理を紹介する．階別リー代数の言葉で述べた方が分かりやすいと思われる．

命題 2.66　$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ を階別リー代数, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^k$ を付随する放物型部分代数とする．このとき以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{l}_\mathfrak{q} := \mathfrak{g}^0$ は $\mathfrak{q}$ 内の部分リー代数.

(2)　$\mathfrak{n}_\mathfrak{q} := \bigoplus_{k>0} \mathfrak{g}^k$ は $\mathfrak{q}$ 内の冪零部分リー代数.

(3)　$\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ はベクトル空間としての直和 (これを **Chevalley 分解** と呼ぶ).

$\Phi \subsetneq \Lambda$ から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_\Phi$, その Chevalley 分解を $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ 等の記号で表すことが多い. 以下の議論では, 放物型部分代数は階別リー代数の特性元 Z を使う方が便利なことが多い.

例 2.67　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ とし, H^1 から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_1$ とする．このとき, Chevalley 分解 $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ は次で与えられる:

$$\mathfrak{l}_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

次に, Chevalley 分解に現れる $\mathfrak{l}_\Phi$ をさらに分解する．例えば上記の $\mathfrak{l}_1$ の場合は, 次の分解をもつ:

$$\mathfrak{l}_1 := \mathrm{span}\{H^1\} \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\} \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

命題 2.68　$Z := H^{i_1} + \cdots + H^{i_m}$ (ただし $i_1 < \cdots < i_m$) とし, これから得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}$, Chevalley 分解を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ とする．このとき以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{a}_\mathfrak{q} := \mathrm{span}\{H^{i_1}, \ldots, H^{i_m}\}$ は $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ 内の可換な部分リー代数.

(2)　$\mathfrak{m}_\mathfrak{q} := \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \ominus \mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ 内の部分リー代数.

(3)　$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ はベクトル空間としての直和 (これを **Langlands 分解** と呼ぶ).

ここで $\ominus$ は (Killing 形式から決まる内積 B_θ に関する) 直交補空間を表す．上で得られた部分代数 $\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ を放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ の **冪零部分**, **可解部分** という.

問題 2.69（レポート問題 10）　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5,\mathbb{R})$ とし, Λ を標準的な単純ルート系とする. このとき $Z := H^1 + H^2$ から得られる放物型部分代数とその Langlands 分解を求めよ. ただしここで, $\mathfrak{sl}(5,\mathbb{R})$ の制限ルート系は前述のものを用いて良く, 標準的な単純ルート系は $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i \in \{1,\ldots,4\})$ で与えられるもの.

2.6.4　放物型部分代数の冪零部分

放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ の Langlands 分解の冪零部分 $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ について調べる. 制限ルート系とルート空間の次元が分かっていれば, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ の情報を読み取ることができる.

命題 2.70　$Z = H^{i_1} + \cdots + H^{i_k}$ を特性元とする階別リー代数から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}$, その冪零部分を $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ とする. このとき以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ の step 数は $\widetilde{\alpha}(Z)$ (ただし $\widetilde{\alpha}$ は最高ルート);

(2)　$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{\nu}$ としたとき, $\mathfrak{g}^k = \bigoplus_{\alpha(Z)=k} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

この命題により, $\mathfrak{g}$ や $\mathfrak{q}$ の具体的な形が分かっていなくても, 冪零部分 $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ の step 数や各 $\mathfrak{g}^k$ の次元といった情報は, ルート系さえされば読み取れることを意味する. ちなみに, 単純リー代数の分類は知られており, その制限ルート系とルート空間の次元も一覧表がある.

例 2.71　$\mathfrak{g}$ の制限ルート系が G_2 型であるとする (このようなリー代数は 2 個あり, ルート空間の次元は全て 1 または全て 2). このとき単純ルート系 $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ は, 最高ルートが $\widetilde{\alpha} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ となるように取れる. このとき放物型部分代数は 3 個あり, その冪零部分の step 数は 3, 2, 5 のいずれか.

G_2 型ルート系については, 講義中に説明する. 最後に, 上で紹介した分解の幾何への応用について, 主張だけ紹介する.

定理 2.72　$\mathfrak{s}_{\mathfrak{q}} := \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ を Langlands 分解の可解部分とする. このとき $\mathfrak{s}_{\mathfrak{q}}$ は Einstein 内積をもつ.

Langlands 分解の可解部分は, これ以外にも様々な (等質空間の) 幾何学において重要な役割を果たす. 従って, その定義や具体例を知っていると, 取り組むことができる問題が実は数多くある.

2.7 Dynkin 図形

Dynkin 図形とは, 単純ルート系を図式化したグラフである. ルート系の分類は, Dynkin 図形として現れるグラフを分類することによって得られる. ここでは Dynkin 図形の作り方を紹介する. ルート系 Δ の条件のうち, 次を思い出す:

(整数性) $\alpha, \beta \in \Delta$, $c_{\alpha,\beta} := 2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.
(鏡映性) $\alpha, \beta \in \Delta$, $\beta - c_{\alpha,\beta}\alpha \in \Delta$.

命題 2.73 Δ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とし, $c_{ij} := c_{\alpha_i,\alpha_j}$ と略記する. このとき, $i \neq j$ かつ $||\alpha_i|| \leq ||\alpha_j||$ ならば, 次の 4 パターンのいずれかが成り立つ:

c_{ij}	0	-1	-2	-3
c_{ji}	0	-1	-1	-1
角	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$\|\|\alpha_j\|\|/\|\|\alpha_i\|\|$	$-$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

これらのパターンは, ルート系の絵を書いて状況を掴むと良い. また, 単純ルートを頂点とし, その間を上の 4 パターンに応じた辺で結ぶことによって, グラフを作る.

定義 2.74 単純ルート $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を頂点とし, 各頂点の間を $c_{ij}c_{ji}$ 本の辺で結び, 辺の上に $||\alpha_i||$ と $||\alpha_j||$ の大小に応じた不等号を書いたものを **Dynkin 図形** とよぶ.

ルート系が被約でない場合 ($c\alpha \in \Delta \Leftrightarrow c = \pm 1$ が成り立たない場合) には, それに関する情報を加える場合が多い.

定理 2.75 ルート系は Dynkin 図形によって (同型を除いて) 一意に定まる.

ルート系の分類を行う際には, Dynkin 図形として現れるグラフを分類するという手法が一般的である. 実際, 一つの頂点と結ばれる頂点は 3 個まで, サイクルは存在しない, などの性質を示していくことによって, 分類は完成する.