第 1 章

集合と写像

ここでは, これから数学を学ぶ上で基礎となる「集合」と「写像」と「論理」について, その基礎的な事項を解説する. なお, 以下の命題等のうち「再現推奨」と書かれたものは, 基本的なものなので, 証明を見ずに自力で証明を再現できるようになることが望ましいという意味である. 暗記せよという意味ではない.

1.1 集合の概念

1.1.1 集合と元

定義 1.1.1. 範囲のはっきりしたものの集まりを 集合 という. 集合の中に入っている個々のものを 元 または 要素 という.

集合 A に対して, a が A の元であることを $a \in A$ や $A \ni a$ で表す (元でないときは $a \notin A$). このことを, a は A に属する, a は A に含まれる, 等ともいう.

1.1.2 集合と記法

集合を表すときに, $\{a, b, c\}$ のように元を並べる表記 (外延的表記) と, 元の満たすべき条件あるいは性質を指定する $\{x \mid C(x)\}$ のような表記 (内延的表記) がある.

定義 1.1.2. 以下の集合は特定の記号で表す:

(1) $\mathbb{N} := \{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
(2) $\mathbb{Z} := \{x \mid x$ は整数 $\}$;
(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x$ は有理数 $\}$;
(4) $\mathbb{R} := \{x \mid x$ は実数 $\}$.
(5) $\mathbb{C} := \{x \mid x$ は複素数 $\}$.

集合の元は, 順番と重複は無視することに注意. 例えば $\{1,1,1,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\}$. 集合の元の条件が多い場合は, 例えば $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ のように書く. ちなみにこれは正の実数の集合 (半直線).

定義 1.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ をみたすとする.

(1) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (これを開区間という);

(2) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (これを閉区間という).

不等号は $\leqq$ ではなく $\leq$ で表す. 開区間と $\mathbb{R}^2$ の元は紛らわしいので, 混乱する恐れがある場合は省略せずに書く. 例えば円板の内部は

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \tag{1.1}$$

定義 1.1.4. 元を全くもたない集合を <u>空集合</u> といい, $\emptyset$ で表す.

1.1.3　論理記号

ここで (教科書の順番を入れ替えて) 論理記号を紹介する. 全ての数学的な性質は, 以下の記号の組み合わせによって記述される, と言っても過言ではない.

定義 1.1.5. 記号 $\forall$ および $\exists$ を以下で定義する:

- 「$\forall \ldots$」で「全ての ... に対して」を表す.
- 「$\exists \ldots$」で「... が存在する」を表す.
- 「s.t.」あるいは「:」で「such that」を表す.

記号 $\forall$ は, 「全ての」の代わりに「任意の」と言うこともある. 「任意の = 好き勝手なもの = 自分が好きに決めて良い」ではないことに注意. 気持ち的には「任意の = 何が起ころうとも = 相手がどんな手を打ってきても」が近い.

例題 1.1.6. 集合 $M :=$ { この授業の履修者 } に対し, 次の意味と真偽を考えよ:

(1) $\forall x \in M$, x は 18 歳以上.

(2) $\forall x \in M$, x は男.

(3) $\exists x \in M : x$ は男.

(4) $\exists x \in M : x$ の身長は 2m 以上.

命題の証明の書き方に入る前に, 否定命題について説明する. 記号 $\forall$ や $\exists$ が含まれる命題は, 否定命題を作る際に注意が必要である. 具体例で考えると, 「全員 18 歳以上」の否定命題は「18 歳以上でない人がいる」. これを論理記号で書くと次のようになる.

例 1.1.7. 問題 1.1.6 のそれぞれの否定命題は, 次のようになる:

(1)' $\exists x \in M : x$ は 18 歳未満.

(2)' $\exists x \in M : x$ は女.

(3)' $\forall x \in M,\ x$ は女.

(4)' $\forall x \in M,\ x$ の身長は 2m 未満.

論理記号を使って書かれた命題は, 機械的に否定命題を作ることが出来る.

命題 1.1.8. 命題 (P) に対し, 次が成り立つ.

(1)「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立」の否定命題は, 「$\exists x \in M\ \ \text{s.t.}\ (P)$ が成立しない」.

(2)「$\exists x \in M\ \ \text{s.t.}\ (P)$ が成立」の否定命題は, 「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立しない」.

以下, いくつかの命題の真偽を判定する問題を挙げる. ここで真偽を判定するとは, 真か偽かを予想しそれを証明する, という意味である. ある命題が偽であることを示すには, その否定命題が真であることを示す必要がある.

例題 1.1.9. 集合 $J :=$ { グー, チョキ, パー } に対し, 次の命題の真偽を判定せよ:

(1) $\forall x \in J,\ x$ はグーに勝つ;

(2) $\exists x \in J : x$ はグーに勝つ;

(3) $\forall x \in J, \exists y \in J : y$ は x に勝つ;

(4) $\exists y \in J : \forall x \in J, y$ は x に勝つ.

上の (3), (4) から分かるように, 命題は並び順を変えると意味が変わる. 従って順番には気を付ける必要がある. そのため, 「前から順番に読む」ことと「証明も前から順番に行う」ことを強く意識して欲しい.

例題 1.1.10 (再現推奨)**.** A が開区間 $(0, 2)$ または半直線 $(0, +\infty)$ であるとする. このとき次の真偽を判定せよ:

(1) $\forall a \in A, a \leq 3;$

(2) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq M.$

ちなみに, この例題の (2) の条件をみたすとき, A は 上に有界 であるという.

問題 1.1.11 (小テスト 1)**.** 集合 $A := \{-x^2 + 2x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$ が上に有界であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ.

1.1.4　集合の相等

同じ集合でも, 複数の表示方法があり得る. 集合 A, B が集合として等しいときに $A = B$ とかく. 例えば (前にも書いたが)

$$\{1,1,1,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\}.$$

集合が等しいことに関しては, 次の部分集合の項で詳しくみる.

定義 1.1.12. 命題 p, q に対して, 命題 $p \Rightarrow q$ (p ならば q) を次で定義する: p が正しいときに q も正しい.

命題 p が偽である場合には, $p \Rightarrow q$ は真である. 詳細は次頁.

1.1.5　部分集合

部分集合 $A \subset B$ という概念を定義する. 部分集合でないことは $A \not\subset B$ で表す. 今後, 部分集合であることや, 集合が等しいことを証明する機会が頻繁にある. 実際の証明の中身は, それぞれに応じて異なるが, その「形式」は全て同じである.

定義 1.1.13. 集合 A, B に対して, $A \subset B$ である (A が B の <u>部分集合</u> である) とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A,\ a \in B$.

部分集合の定義「$\forall a \in A,\ a \in B$」は「$a \in A \Rightarrow a \in B$」と同値である. この場合にはどちらで書いても問題ないが, もっと長い命題のときには, 前者の方が間違いにくい.

注意 1.1.14. 集合 A ($\subset \mathbb{R}$) が上に有界であることの定義「$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ a \leq M$」は, 「$\exists M \in \mathbb{R} : (a \in A \Rightarrow a \leq M)$」と同値である. これを括弧を使わないで単に並べると「$(\exists M \in \mathbb{R} : a \in A) \Rightarrow a \leq M$」と区別できないので, 注意が必要.

定義から分かるように, 部分集合は一致する場合を含む. 一致する場合を除外したい場合は $A \subsetneq B$ で表し, 真部分集合であるという.

定義 1.1.15. 集合 A, B に対して, $A = B$ である (集合として一致する) とは, 次が成り立つこと: $A \subset B$ かつ $A \supset B$.

注意 1.1.16. 空集合 $\emptyset$ は全ての集合 A の部分集合である. すなわち, $\emptyset \subset A$.

命題 1.1.17. 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ: $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.

1.2　集合の間の演算

1.2.1　論理の準備

命題 p, q を組み合わせてできる命題について述べておく．命題の真と偽を, 簡単のために T (true, 真) と F (false, 偽) で表す．

例 1.2.1. 命題 p, q の真偽に応じて, 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽は次の表のようになる:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

この表を真理値表という．命題 $p \Rightarrow q$ はこの表で定義されていると考えて良い．これ以外にも p と q を使った命題があるが, それらは真理値表で定義を与える．

定義 1.2.2. 命題 p, q に対して, 命題 $p \vee q$ (p または q), および $p \wedge q$ (p かつ q) を次で定義する:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

従って, 例えば p が真ならば $p \vee q$ も真である．すなわち $p \Rightarrow p \vee q$ は常に真である．また, 2 個の命題の真理値表が完全に一致するとき, それらの命題は同値である．例えば, $p \vee q$ と $q \vee p$ は同値．他には以下のような例がある．命題 p の否定命題を $\neg p$ で表す．

問題 1.2.3 (自習用)**.** 以下の命題が同値であることを真理値表を使って確かめよ:

(1) $p \Rightarrow q$ と $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ と $(\neg p) \vee q$;

(2) $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$;

(3) $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$;

(4) $(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$;

(5) $p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

(6) $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.2.2　和集合

定義 1.2.4. 集合 A, B の 和集合 を次で定める:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

集合を A_1, A_2 だとすると, 和集合は次のように書くこともできる:

$$A_1 \cup A_2 = \{x \mid \exists i \in \{1,2\} : x \in A_i\}.$$

命題 1.2.5 (再現推奨)**.** 集合 A, B に対して以下が成り立つ:

(1) $A \subset A \cup B$;
(2) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

その他, 類似の性質が教科書で紹介されているので, (全ての証明をまじめに書く必要はないが) 適宜自習しておくと良い.

1.2.3　共通部分

定義 1.2.6. 集合 A, B の 共通部分 を次で定める:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

集合を A_1, A_2 だとすると, 共通部分は次のように書くこともできる:

$$A_1 \cap A_2 = \{x \mid \forall i \in \{1,2\}, x \in A_i\}.$$

共通部分に関して, 和集合と同様のいくつかの性質が教科書で紹介されている. それらについては置いて, 共通部分と和集合が混在した性質について述べる.

命題 1.2.7 (分配律)**.** 集合 A, B, C に対して以下が成り立つ:

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.2.4　差

定義 1.2.8. 集合 A, B の 差集合 を次で定める:

$$A - B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}.$$

問題 1.2.9 (自習用)**.**

(1) 次を示せ: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

(2) 次の等号の反例を具体的に挙げよ: $(A - B) - C = A - (B - C)$.

1.2.5　普遍集合

定義 1.2.10. X を集合, A を X 内の部分集合のとき, 差集合 $X - A$ を A の X 内での 補集合 という.

上のような場合に, X を普遍集合あるいは全体集合という. また, 普遍集合が指定されているとき, 補集合は A^c で表す.

命題 1.2.11 (de Morgan の法則)**.** X を全体集合, A, B を部分集合とするとき,

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

問題 1.2.12 (自習用)**.** 以下を示せ:

(1) $(A^c)^c = A$;

(2) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$;

1.2.6　集合系・巾集合

定義 1.2.13. 集合の集合, すなわち, 入っている個々のものが集合であるような集合を 集合系 という.

集合系は集合族と呼ばれることもある. 教科書では集合系と集合族を厳密に使い分けをしているので, この講義ではそれに従う. 集合族は後日に改めて扱う. 集合と集合系の区別は, 慣れるまで難しいかも知れないが, 数学では後々まで使う非常に重要なものである.

定義 1.2.14. 集合 X に対して, X 内の部分集合全体のつくる集合系を $\mathfrak{P}(X)$ で表し, X の 巾集合 という.

ちなみに $\mathfrak{P}$ は P であり, 巾集合の英語名 power set の頭文字. 巾集合は 2^X で表すこともある. 集合 X の元の個数を $\#X$ で表す.

例 1.2.15. 有限集合 X に対して, $\#\mathfrak{P}(X) = 2^{\#X}$. 例えば,

$$\mathfrak{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

1.2.7　集合系の和集合・共通部分

定義 1.2.16. 集合系 $\mathfrak{U}$ に対し, その <u>和集合</u> と <u>共通部分</u> を以下で定める:

(1) $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{A\in\mathfrak{U}} A = \{x \mid \exists A \in \mathfrak{U} : x \in A\}$;

(2) $\bigcap \mathfrak{U} := \bigcap_{A\in\mathfrak{U}} A = \{x \mid \forall A \in \mathfrak{U},\ x \in A\}$.

上で用いた和集合や共通部分の記号 $\bigcup_{A\in\mathfrak{U}} A$, $\bigcap_{A\in\mathfrak{U}} A$ は, 正しくは以下のように書くべきだが, (行間が乱れるのを防ぐために) 省略して書いたものである:

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{U}} A, \qquad \bigcap_{A\in\mathfrak{U}} A.$$

例 1.2.17. 集合系 $\mathfrak{U} := \{(0,1], [0,1), (0,2)\}$ に対して,

(1) $\bigcup \mathfrak{U} = (0,1] \cup [0,1) \cup (0,2) = [0,2)$;

(2) $\bigcap \mathfrak{U} = (0,1] \cap [0,1) \cap (0,2) = (0,1)$.

例 1.2.18 (再現推奨)**.** 以下が成り立つ:

(1) 集合系 $\mathfrak{U} := \{(n-1, n+1) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に対して, $\bigcup \mathfrak{U} = \mathbb{R}$;

(2) 集合系 $\mathfrak{U} := \{(-a, a) \subset \mathbb{R} \mid a > 0\}$ に対して, $\bigcap \mathfrak{U} = \{0\}$.

問題 1.2.19 (小テスト 2)**.** 集合系 $\mathfrak{U} = \{(-\infty, a) \subset \mathbb{R} \mid a > 0\}$ に対して, 共通部分 $\bigcap \mathfrak{U}$ が何になるかを予想せよ. また, $\bigcap \mathfrak{U}$ が予想した集合の部分集合であることを示せ.

問題 1.2.20 (自習用)**.** 上の小テストの逆向きの包含も示せ.

1.3　対応・写像

集合から集合への対応と写像を説明する．写像は, 対応の特別な場合である．

1.3.1　2 つの集合の直積

定義 1.3.1. 集合 A, B に対して, 次を <u>直積集合</u> という:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ と書く (通常の座標平面のこと)．また, $\#A = m$, $\#B = n$ のとき, $\#(A \times B) = mn$ である．例えば $A \times \emptyset = \emptyset$.

1.3.2　対応の概念

定義 1.3.2. 集合 A から集合 B への <u>対応</u> とは, 各 $a \in A$ に対し部分集合 $\Gamma(a) \subset B$ が定められている規則のこと．

A から B への対応を $\Gamma : A \to B$ という記号で表す．対応では, $\Gamma(a) = \emptyset$ (a には何も対応しない) でも良い．もちろん $\Gamma(a)$ に二点以上あっても良い．

例 1.3.3. $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下で定めたものは対応である:

(1) $\Gamma(x) := \{x^2\}$;
(2) $\Gamma(y) := \{x \in \mathbb{R} \mid y = x^2\}$.

定義 1.3.4. 2 つの対応 $\Gamma, \Gamma' : A \to B$ が <u>等しい</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $\Gamma(a) = \Gamma'(a)$.

1.3.3　対応のグラフ

$A \to B$ という対応を与えることと, 直積 $A \times B$ 内の部分集合を与えることは同等である．まずは, 対応から部分集合を作る．

定義 1.3.5. $\Gamma : A \to B$ を対応とするとき, 次をその <u>グラフ</u> という:

$$G(\Gamma) := \{(a, b) \in A \times B \mid b \in \Gamma(a)\}.$$

ちなみに先の例の対応 ($y = x^2$ およびその逆) の場合には, $y = x^2$ および $x = y^2$ の通常の意味のグラフに一致する．

注意 1.3.6. 定義より, $(a,b) \in G(\Gamma) \Leftrightarrow b \in \Gamma(a)$.

部分集合から対応を作ることができることは, 次で示される.

命題 1.3.7. $\forall G \subset A \times B, \exists 1 \Gamma : A \to B$ (対応) : $G = G(\Gamma)$.

ちなみに $\exists 1$ は「唯一つ存在する」ことを意味する ($\exists!$ と書くこともある). 示すことは, 存在することと一意的であること. 存在を示すためには, 構成する. 一意性を示すためには, 2 個あったとして, それらが一致することを示す.

1.3.4　逆対応

対応に対して, 逆対応が存在する.

定義 1.3.8. 対応 $\Gamma : A \to B$ に対し, 次で与えられる $\Gamma^{-1} : B \to A$ を 逆対応 という:

$$\Gamma^{-1}(b) := \{a \in A \mid b \in \Gamma(a)\}.$$

注意 1.3.9. 定義より, $(a,b) \in G(\Gamma) \Leftrightarrow b \in \Gamma(a) \Leftrightarrow a \in \Gamma^{-1}(b)$.

命題 1.3.10. 対応 $\Gamma : A \to B$ および逆対応 $\Gamma^{-1} : B \to A$ に対して,

$$G(\Gamma^{-1}) = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in G(\Gamma)\}.$$

各 $b \in B$ に対して, $\Gamma^{-1}(b)$ を b の Γ による 逆像 という.

1.3.5　写像

写像を定義する. 対応の特別な場合である.

定義 1.3.11. 対応 $\Gamma : A \to B$ が 写像 とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $\#\Gamma(a) = 1$.

すなわち, 写像とは, A の任意の元 $a \in A$ に対して B の元 $b \in B$ を 1 つ与える規則のことである. 写像は $f : A \to B$ で表すことが多い. また, 対応としては $f(a) = \{b\}$ だが, 写像の場合には $f(a) = b$ と書く. 先の例 ($y = x^2$ およびその逆) で考えると, $y = x^2$ は写像だが, その逆は写像ではない.

定義 1.3.12. 写像 $f : A \to B$ に対して, A を 始集合 あるいは 定義域, B を 終集合 あるいは 値域 という.

写像が等しいことは, 対応として等しいことと定義する.

例 1.3.13. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ とする. このとき, A から B への写像は全部で 3^2 個, B から A への写像は全部で 2^3 個.

例 1.3.14. A, B を集合とすると, 以下が成り立つ:

(1) $b_0 \in B$ を固定し, 任意の $a \in A$ に対して $f(a) := b_0$ と定めると, $f : A \to B$ は写像 (これを 定値写像 という);

(2) 任意の $a \in A$ に対して $f(a) := a$ と定めると, $f : A \to A$ は写像 (これを 恒等写像 という).

対応には逆対応が常に存在したが, 写像には逆写像が存在するとは限らない. すなわち, 写像の逆対応が写像になるとは限らない. これについては, 次回以降に詳しく見る.

1.4　写像に関する諸概念

1.4.1　写像による像および原像

定義 1.4.1. 写像 $f : A \to B$ および $P \subset A$ に対し, 次を f による P の 像 という:

$$f(P) := \{f(a) \in B \mid a \in P\} = \{b \in B \mid \exists a \in P : b = f(a)\}.$$

定義 1.4.2. 写像 $f : A \to B$ および $Q \subset B$ に対し, 次を f による Q の 原像 (または 逆像) という:

$$f^{-1}(Q) := \{a \in A \mid f(a) \in Q\}.$$

例 1.4.3. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$ とし, 写像 $f : A \to B$ を $f(1) = f(2) = x$ で定める. このとき以下が成り立つ:

(1) $f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(A) = \{x\}$;
(2) $f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(B) = \{1, 2\}$; $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

例 1.4.4. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ に対し, 以下が成り立つ:

(1) $f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty)) = \mathbb{R}$; $f((-1, 2)) = [0, 4)$;
(2) $f^{-1}((-1, 4)) = (-2, 2)$; $f^{-1}((1, 4)) = (-2, -1) \cup (1, 2)$.

以下では, 集合の間の演算と, 写像による像あるいは逆像の関係を調べる.

定理 1.4.5 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $P, P_1, P_2 \subset A$ とする. このとき

(1) $P_1 \subset P_2 \Rightarrow f(P_1) \subset f(P_2)$;
(2) $f(P_1 \cup P_2) = f(P_1) \cup f(P_2)$;
(3) $f(P_1 \cap P_2) \subset f(P_1) \cap f(P_2)$;
(4) $f(A - P) \supset f(A) - f(P)$;
(5) $f^{-1}(f(P)) \supset P$.

定理 1.4.6 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $Q, Q_1, Q_2 \subset B$ とする. このとき

(1) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow f^{-1}(Q_1) \subset f^{-1}(Q_2)$;
(2) $f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)$;
(3) $f^{-1}(Q_1 \cap Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2)$;
(4) $f^{-1}(B - Q) = A - f^{-1}(Q)$;
(5) $f(f^{-1}(Q)) \subset Q$.

これらの定理の主張のうち, いくつかの証明は講義で紹介する. また, 等号が書かれていないもの, 例えば $f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$ は, 一般には成立しない. その反例を考えることは良い練習になる.

問題 1.4.7 (自習用)**.** 上の 2 つの定理の主張を示せ (講義中に証明したものについても, 自力で復元して確認せよ). また, 定理の主張において等号が書かれていないものについては, 反例を挙げよ.

問題 1.4.8 (小テスト 3)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $Q_1, Q_2 \subset B$ とする. このとき

(1) $f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \supset f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)$ を講義と同じ方法で示せ;

(2) $f^{-1}(Q_1 \cap Q_2) \subset f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2)$ を上を参考にして示せ.

問題 1.4.9 (発展)**.** 上の 2 つの定理の主張の "集合系版" を考え, 正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ.

1.4.2　全射・単射・全単射

写像に対する全射・単射という概念を紹介する.

定義 1.4.10. 写像 $f : A \to B$ に対して,

(1) f が <u>全射</u> とは次が成り立つこと: $\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$;

(2) f が <u>単射</u> とは次が成り立つこと: $\forall a, a' \in A\ (f(a) = f(a')), a = a'$.

(3) f が <u>全単射</u> とは, 全射かつ単射であること.

注意 1.4.11. 写像 $f : A \to B$ に対して,

(1) f が全射であるための必要十分条件は, $f(A) = B$;

(2) f が単射であるための必要十分条件は, $\forall a, a' \in A$, "$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$".

標語的に言うと, $f : A \to B$ が全射とは「B の元は全て A からくる」, 単射とは「違うものは違うところにいく」あるいはもっと雑にいうと「行き先がかぶらない」.

例 1.4.12. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ とする. このとき,

(1) A から B への写像は $2^3 = 8$ 個, うち全射は $2^3 - 2 = 6$ 個, 単射は存在しない;

(2) B から A への写像は $3^2 = 9$ 個, うち全射は存在ない, 単射は $3 \cdot 2 = 6$ 個.

このような集合の元の個数が小さい場合に, 写像を書き上げて全射あるいは単射であるかを確認することは, 慣れるための練習になる.

例 1.4.13. 任意の集合 A に対して, 恒等写像 $f : A \to A : a \mapsto a$ は全単射.

例 1.4.14. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について,

(1) $f(x) = x^3$ は全単射;

(2) $f(x) = x^3 - x$ は全射だが単射でない;

(3) $f(x) = e^x$ は全射でないが単射:

(4) $f(x) = x^2$ は全射でも単射でもない.

問題 1.4.15 (発展)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が多項式で与えられているとする. このとき, f が全射であるかどうかと, 多項式の次数の間の関係を考えよ.

問題 1.4.16 (発展)**.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加ならば単射であることを示せ. ただし, f が狭義単調増加とは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ (x_1 < x_2),\ f(x_1) < f(x_2)$.

前回, 集合の間の演算と写像の像・逆像との関係を調べた. そのときにいくつか成立しない性質があったが, それらは写像が全射あるいは単射であることを仮定すると成立する.

命題 1.4.17 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を単射とし, $P, P_1, P_2 \subset A$ とする. このとき

(1) $f(P_1 \cap P_2) \supset f(P_1) \cap f(P_2)$;

(2) $f(A - P) \subset f(A) - f(P)$;

(3) $f^{-1}(f(P)) \subset P$.

命題 1.4.18 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を全射とし, $Q \subset B$ とする. このとき

(1) $f(f^{-1}(Q)) \supset Q$.

問題 1.4.19 (小テスト 4)**.**

(1) 命題 1.4.18 を講義と同じ方法で示せ;

(2) 命題 1.4.17 (3) を上を参考にして示せ.

対応と写像の項において, 逆対応は常に存在するが, それが写像になるとは限らないことを述べた. 次は, 逆対応が存在するための必要十分条件を与える.

定理 1.4.20. $f : A \to B$ を写像とする. このとき, 逆対応 $f^{-1} : B \to A$ が写像であるための必要十分条件は, f が全単射であること.

逆対応が写像になるとき, これを逆写像という. しかし, 通常よく使われる逆写像の定義は合成を用いたものだと思われる. これらについては, 次回の講義で紹介する.

1.4.3 写像の合成

定義 1.4.21. 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して, 次で定義される写像 $g \circ f : A \to C$ を f と g の 合成写像 という: $(g \circ f)(a) := g(f(x))$.

定理 1.4.22 (復元推奨)**.** 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して以下が成り立つ:

(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射;
(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射;
(3) f, g が全単射ならば $g \circ f$ も全単射.

命題 1.4.23 (復元推奨)**.** 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して以下が成り立つ:

(1) $g \circ f$ が全射ならば g は全射;
(2) $g \circ f$ が単射ならば f は単射.

問題 1.4.24 (自習用)**.** 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ および合成写像 $g \circ f$ を考える. そのうち 2 個が全射あるいは単射のいずれかであるとき, 残りの写像が全射あるいは単射であるかを調べよ. (正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ.)

命題 1.4.25. 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対し, 次の結合則が成り立つ: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

合成写像を用いることで, 逆写像を定義することができる. 以下では, A から A への恒等写像を I_A で表す.

定義 1.4.26. 写像 $f : A \to B$ に対して, 写像 $g : B \to A$ が f の 逆写像 であるとは, 以下が成り立つこと: $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$.

f の逆写像が存在するとき, それを f^{-1} で表す. これは逆対応と同じ記号だが, 次で分かるように, 結果的に一致する.

定理 1.4.27. 写像 $f : A \to B$ に対して, 以下は互いに同値:

(1) f は全単射;
(2) f には逆写像が存在する;
(3) f の逆対応は写像である.

証明のために (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. これはよくある論法で, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) を示すよりも手数が少ない. ((1) $\Rightarrow$ (2) を直接示すのが大変な時にも使う.)

1.4.4　写像の縮小・拡大

定義 1.4.28. $f : A \to B$ を写像, $A' \subset A$ とするとき, 次で定義される写像 $f|_{A'} : A' \to B$ を f の A' への 制限 という: $(f|_{A'})(a) := f(a)$ $(a \in A')$.

逆に, 定義域を大きくしたものを写像の拡大という.

例題 1.4.29. 単射の制限写像は単射. 単射でない写像でも制限が単射になることはある.

1.4.5　写像の終集合に関する注意

$f : A \to B$ を写像, $f(A) \subset B'$ とするとき, 自然に写像 $f : A \to B'$ が定義される. 例えば $B' = f(A)$ とすると, 全射が得られる.

例 1.4.30. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない. しかし定義域と値域をそれぞれ制限した写像 $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1.1]$ は全単射. この写像には逆写像が存在する (逆三角関数). cos, tan についても同様.

1.4.6　写像の集合

定義 1.4.31. A から B への写像全体の集合を次のように表し, 配置集合 という:

$$\mathfrak{F}(A, B) := \{f : A \to B : \text{写像}\}.$$

$\mathfrak{F}(A, B)$ は, $\mathrm{Map}(A, B)$ と書くのが覚えやすいが, B^A と書くこともある. 例えば有限集合で $\#A = m$, $\#B = n$ のとき, $\#\mathfrak{F}(A, B) = n^m$.

定義 1.4.32. $A \subset X$ のとき, 次で定義される $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ を 定義関数 という:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

命題 1.4.33. 定義関数により定義される次の写像は全単射:

$$\chi : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{F}(X, \{0, 1\}) : A \mapsto \chi_A.$$

ここで $\mathfrak{P}(X)$ は X の巾集合である. この他にも, 例えば実ベクトル空間 V に対して, V から $\mathbb{R}$ への線型写像全体の集合 (これを V の双対空間という) などのような, 写像の成す集合は今後しばしば登場する.

1.5　添数づけられた族・一般の直積

1.5.1　元の無限列・有限列

実数の数列 $\{a_n\}$ は, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことだと考えられる. 細かいことを言うと, 集合 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ とは違う意味なので, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ などの記号で表さなくてはならない.

定義 1.5.1. 集合 A に対して, $\mathbb{N}$ から A への写像を A の元の列 という.

このようにすると, 複素数の列, 行列の列, 関数の列, なども考えることができる.

1.5.2　元の族

定義 1.5.2. Λ および A を集合とする. このとき写像 $a : \Lambda \to A$ を, Λ で添数づけられた A の元の族 といい, 記号 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ あるいは $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で表す.

特に $\Lambda = \mathbb{N}$ のときは元の列である. 一般には, $\Lambda = \mathbb{R}^2$ などの場合もあるので, 一列に並んでいるとは限らない.

1.5.3　集合族とその和集合・共通部分

定義 1.5.3. Λ で添数づけられた族で, 各 A_λ が集合であるものを, Λ で添数づけられた 集合族 といい, 記号 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で表す.

集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は集合系である. 教科書では区別しているが, 区別しないで扱う場合も多い. なお, 全ての A_λ が X 内の部分集合となる集合族を, X の 部分集合族 という.

定義 1.5.4. 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, 和集合と共通部分を以下で定義する:

(1) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$;
(2) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \forall\lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda\}$.

これらの扱い方は, 集合系の和集合や共通部分と全く同様である.

命題 1.5.5 (分配律; 復元推奨)**.** 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 集合 B に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cap B)$;
(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cup B)$.

添字集合が $\Lambda = \{1, 2\}$ のとき, 上の分配律は以前に紹介した命題 1.2.7 と一致する. このようなとき, 上の命題は, 命題 1.2.7 の一般化であるという.

命題 1.5.6 (de Morgan の法則; 復元推奨)**.** X を普遍集合, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とするとき, 以下が成り立つ:

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c$;
(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c$.

上の命題は, de Morgan の法則の一般化である. この無限個の場合も含めて de Morgan の法則ということが多い. 次は, 写像の像と逆像に関する性質の一般化.

命題 1.5.7 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を写像, $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の部分集合族, $(Q_\mu)_{\mu\in M}$ を B の部分集合族とするとき, 以下が成り立つ:

(1) $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$;
(2) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$;
(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} Q_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(Q_\mu)$;
(4) $f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in M} Q_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(Q_\mu)$.

問題 1.5.8 (自習用)**.** 上の (2) の逆向きの包含関係 $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$ は一般には成り立たないが, 写像 f が単射であることを仮定すれば成り立つことを示せ.

問題 1.5.9 (小テスト 5)**.** 上の命題の設定を考える.

(1) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$ を講義と同じ方法で示せ;
(2) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} Q_\mu\right) \subset \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(Q_\mu)$ を示せ.

1.5.4　中間試験と事前救済レポート

6/6(火) 授業時に中間試験を行う. 6/2(金) までに事前救済レポートを提出しても良い. 問題は「(1) 集合の演算, (2) 像と逆像, (3) 全射と単射, (4) 集合族, に関する中間試験の問題を予想し, その問題と解答を書け」. レポートは, 1 枚目に問題・学生番号・氏名を書き, 2 枚目以降に解答を書き, 必ず綴じること. 表紙を付けてはならない.

1.5.5 一般の直積・選出公理

定義 1.5.10. 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の <u>直積</u> を次で定義する:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid \forall\lambda\in\Lambda,\ a_\lambda\in A_\lambda\}.$$

特に $\Lambda=\{1,2\}$ の場合は, 直積 $A_1\times A_2$ と一致する. また $\Lambda=\{1,2,\ldots,n\}$ のときの直積を $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ と表すことが多い.

注意 1.5.11. $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とし, $\exists\lambda_0\in\Lambda:\ A_{\lambda_0}=\emptyset$ が成り立つと仮定する. このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\emptyset$.

ここで述べた注意の逆に相当する主張が次の選出公理である. 選出公理は, 選択公理と呼ばれることもある. 公理というのは, これが成立するものとして認めて話を進める, という位置付けのもの. 証明するものではない.

公理 1.5.12 (選出公理)**.** $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とし, $\forall\lambda\in\Lambda$, $A_\lambda\neq\emptyset$ が成り立つと仮定する. このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$.

直積が $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$ であるということは, その中の元 $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在するということ. すなわち, 各 λ に対して $a_\lambda\in A_\lambda$ を "選出" することができるということ. このことが成立するかどうかは, Λ が無限集合の場合には全く自明ではない.

1.5.6 写像に関する一定理

写像が全単射であることと逆写像が存在することは同値であった. この性質を, 全射と単射に分解して述べることができる.

定理 1.5.13. $f: A\to B$ を写像とする. このとき,

(1) f が全射 $\Leftrightarrow \exists s: B\to A$ (写像) : $f\circ s=I_B$;
(2) f が単射 $\Leftrightarrow \exists r: B\to A$ (写像) : $r\circ f=I_A$.

どちらの主張も $(\Leftarrow)$ に関しては実質的に証明済み (自力で復元できることが望ましい). 全射に関する $(\Rightarrow)$ の証明に, 選出公理が必要になる.

系 1.5.14. A, B を集合とする. このとき以下は同値:

(i) A から B への単射が存在;
(ii) B から A への全射が存在.

中間試験問題

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- $f : A \to B$, $Q \subset B$ に対して, $f^{-1}(Q) := \{a \in A \mid f(a) \in Q\}$.
- $f : A \to B$, $P \subset A$ に対して, $f(P) := \{f(a) \in B \mid a \in P\}$.
- $f : A \to B$ が全射とは, $\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$.
- $f : A \to B$ が単射とは, $\forall a, a' \in A\ (f(a) = f(a')), a = a'$.
- $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \forall\lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda\}$.
- $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$.

問題

[1] $f : A \to B$ を写像とする.

(1) (20 点) $f^{-1}(f(P)) \subset P$ または $f^{-1}(f(P)) \supset P$ のどちらかは一般には正しくない. 正しくない方の反例を挙げよ.

(2) (20 点) 上で一般には正しくないとした方の包含関係を, f が単射のときに示せ.

(3) (20 点) f が単射でないとき, 次を示せ: $\exists P \subset A : f^{-1}(f(P)) \neq P$.

[2] (20 点) 集合系 $\mathfrak{U} = \{[a, +\infty) \mid a > 0\}$ に対して, 和集合 $\bigcup\mathfrak{U}$ が何になるかを予想せよ. また, $\bigcup\mathfrak{U}$ が予想した集合の部分集合であることを示せ.

[3] (20 点) 写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して, 合成写像 $g \circ f$ が全射であるとする. このとき g が全射であるかどうかを予想し, それを示せ.

[4] (20 点) $f : A \to B$ を写像, $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の部分集合族とする. このとき次が成り立つかどうかを予想し, それを示せ:

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda).$$

[5] (中間アンケート) 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

1.6　同値関係

1.6.1　関係の概念

ここでは, “2 変数の関係” を扱う. 集合 A において, $a, b \in A$ に対して命題 $R(a, b)$ が定められているとき, これを <u>関係</u> という. 例えば実数 $\mathbb{R}$ における大小関係 ($R(a, b)$ が $a < b$ で与えられるもの) は, 関係の典型例である. 他にも, 三角形全体の集合における合同や相似も, 関係である.

$a, b \in A$ が関係 R をみたすことを aRb で表す. 他にも, 考えている関係によって $a \sim b$ や $a \equiv b$ などの記号で表すこともある.

1.6.2　同値関係

定義 1.6.1. A を集合, $\sim$ を A 上の関係とする. このとき $\sim$ が <u>同値関係</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) (反射律) $\forall a \in A,\ a \sim a$;
(ii) (対称律) $\forall a, b \in A$, “$a \sim b \Rightarrow b \sim a$”;
(iii) (推移律) $\forall a, b, c \in A$, “$a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$”.

例 1.6.2. A を集合とすると, 次は A 上の同値関係: $a \sim b :\Leftrightarrow a = b$.

例 1.6.3 (復元推奨)**.** $n \in \mathbb{Z}$ とすると, 次は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係: $a \sim b :\Leftrightarrow a \equiv b \pmod n$.

ここで $a \equiv b \pmod n$ は, n で割った余りが等しいことを意味する. 別の言い方をすると, $a - b$ が n の倍数であること, すなわち $\exists k \in \mathbb{Z} : a - b = kn$.

定義 1.6.4. A を集合, $\mathfrak{U}$ を A の部分集合系とする. このとき, $\mathfrak{U}$ が A の <u>直和分割</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\bigcup \mathfrak{U} = A$;
(ii) $\forall C, C' \in \mathfrak{U}\ (C \neq C'),\ C \cap C' = \emptyset$.

集合の直和分解から, 同値関係を定めることができる.

例 1.6.5. $\mathfrak{U}$ が A の直和分割であるとする. このとき次は A 上の同値関係: $a \sim b :\Leftrightarrow \exists C \in \mathfrak{U} : a, b \in C$.

1.6.3 同値類・商集合

先の例とは逆に, 同値関係から直和分解を得ることもできる.

定義 1.6.6. A を集合, $\sim$ を A 上の同値関係とする. このとき, 各 $a \in A$ に対し, 次を a を含む 同値類という:

$$C(a) := \{x \in A \mid x \sim a\}.$$

同値類は $C(a)$ の代わりに $[a]$ や $\overline{a}$ などの記号で表すこともある.

命題 1.6.7. A を集合, $\sim$ を A 上の同値関係, $a, b \in A$ とするとき, 以下が成り立つ:

(1) $a \in C(a)$;
(2) $a \sim b \Leftrightarrow C(a) = C(b) \Leftrightarrow C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$.

以上のことを用いると, 集合上に同値関係を与えることと, その集合に直和分解を与えることが "同等" であることが分かる.

定理 1.6.8. A を集合, $\sim$ を A 上の同値関係とするとき,

(1) $\sim$ による同値類全体の集合 $\mathfrak{U}$ は, A の直和分解;
(2) 上の直和分解 $\mathfrak{U}$ から得られる同値類は, 始めに与えられていた $\sim$ と一致する.

この定理に登場した "同値類全体の集合" は, 実は様々な分野の数学において重要な概念である. 従って, 名前を付ける.

定義 1.6.9. A を集合, $\sim$ を A 上の同値関係とするとき, その同値類全体の集合を 商集合といい, 記号 $A/\sim$ で表す.

例 1.6.10. $n \in \mathbb{Z}$ とし, $\sim$ を $\mathbb{Z}$ 上の前述の同値関係とする ($a \equiv b \pmod{n}$ で定義されるもの). このとき,

(1) $C(0) = \{0, \pm n, \pm 2n, \cdots\} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
(2) $C(1) = \{kn + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
(3) $Z/\sim = \{C(0), C(1), \ldots, C(n-1)\}$.

これは要するに "n 進数" を定義していることになる. 詳しいことは恐らく (次学年以降の) 別の授業で扱われる.

1.6.4 写像の分解

ここでは集合 A 上の同値関係 $\sim$ による同値類を $[a]$ で表す.

定義 1.6.11. $\sim$ を A 上の同値関係とするとき, 次の写像を <u>自然な射影</u> という:

$$\pi : A \to A/\!\sim\, : a \mapsto [a].$$

従って, 写像 $f : A \to B$ および B 上の同値関係 $\sim$ があったときには, 自然な射影を合成することで, 新しい写像 $f' : A \to B/\!\sim\, : a \mapsto [f(a)]$ が得られる. 一方で, A 上に同値関係があったときには, 状況は複雑になる.

定義 1.6.12. $f : A \to B$ を写像, $\sim$ を A 上の同値関係とする. このとき次を f から決まる <u>誘導対応</u> という:

$$\overline{f} : A/\!\sim\, \to B : [a] \mapsto \{f(a') \mid a' \in [a]\}.$$

例 1.6.13. 恒等写像 $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}$ 上の次の同値関係を考える: $a \sim b :\Leftrightarrow a \equiv b \pmod 2$. このとき, 誘導対応 $\overline{\mathrm{id}} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は以下をみたす (よって写像ではない):

$$\overline{\mathrm{id}}\,([0]) = [0] = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\},$$
$$\overline{\mathrm{id}}\,([1]) = [1] = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}.$$

命題 1.6.14. $f : A \to B$ を写像, $\sim$ を A 上の同値関係とし, 次が成り立つとする: $\forall a, a' \in A\ (a \sim a'),\ f(a) = f(a')$. このとき, 誘導対応 $\overline{f} : A/\!\sim\, \to B$ は写像.

この命題の条件が成り立つとき, $\overline{f}$ を <u>誘導写像</u>, あるいは写像 $\overline{f}$ が <u>**well-defined**</u> であるという. 条件を荒く言うと, “同値なものは同じところに移る”.

例 1.6.15 (復元推奨)**.** $\mathbb{R}$ 上の関係を次で定める: $a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$. また $\mathbb{R}^2$ 内の原点を中心とする単位円を S^1 とする. このとき

(1) $\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係;
(2) 写像 $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ から決まる誘導写像は well-defined;
(3) 誘導写像 $\overline{f} : \mathbb{R}/\!\sim\, \to S^1$ は全単射.

この例の全射性の証明を見ると想像が付くかも知れないが, 一般に以下が成り立つ. ちなみに, 単射の誘導写像がどうなるかは, 上級者向け演習問題.

命題 1.6.16 (復元推奨)**.** 写像 $f : A \to B$ が全射であり, 誘導写像 $\overline{f} : A/\!\sim\, \to B$ が well-defined のとき, $\overline{f}$ は全射.

写像の定義域と値域を両方とも割って商集合にする場合も, 同様に誘導写像を考えることができる.

例 1.6.17. $\mathbb{Z}$ 上に mod 3 による同値関係を入れる. また, 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \mapsto 2a$ を考える. このとき

(1) 写像 f から決まる誘導写像 $\overline{f} : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : [a] \mapsto [f(a)]$ は well-defined;
(2) 上の誘導写像 $\overline{f}$ は全単射.

問題 1.6.18 (発展)**.** 上の例では, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上で 2 倍する写像を考えていた.

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上で k 倍する写像も well-defined であることを示せ;
(2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上で 2 倍する写像が全単射かどうか判定せよ;
(3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上で k 倍する写像が全単射となるための条件を考えよ.

問題 1.6.19 (小テスト 6)**.** $\mathbb{Z}$ 上に mod 3 による同値関係を入れる.

(1) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上で 2 倍する写像が well-defined であることを, 講義と同じ方法で示せ;
(2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上で和をとる次の写像が well-defined であることを示せ:

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : ([a], [b]) \mapsto [a + b].$$

例 1.6.20. $f : A \to B$ を写像とし, A 上の関係を次で定める: $a \sim a' :\Leftrightarrow f(a) = f(a')$. このとき

(1) $\sim$ は A 上の同値関係;
(2) 誘導写像 $\overline{f} : A/\sim \to B$ は well-defined;
(3) 誘導写像 $\overline{f}$ は単射.

命題 1.6.21. $f : A \to B$ を写像とし, $\sim$ を上の例で定めた A 上の同値関係とする. このとき, $\pi : A \to A/\sim$ を自然な射影, $\overline{f} : A/\sim \to f(A)$ を誘導写像, $j : f(A) \to B$ を包含写像とすると, 以下が成り立つ:

$$\pi : \text{全射}, \quad \overline{f} : \text{全単射}, \quad j : \text{単射}, \quad f = j \circ \overline{f} \circ \pi.$$

第 2 章

集合の濃度

ここでは集合の濃度という概念を定義し, 関連する事項を紹介する. 特に, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を可算集合という. 可算よりも大きい集合があることに注意.

2.1 集合の対等と濃度

2.1.1 集合の対等

ここでは, 集合の対等という概念を定義する. 対等であることを, 濃度が等しいということもある.

定義 2.1.1. 集合 A と B が <u>対等</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists f : A \to B$: 全単射.

対等であることを $A \sim B$ という記号で表す. 全単射の逆写像は全単射であり, 全単射と全単射の合成は全単射なので, 次が成り立つ.

定理 2.1.2. 集合 A, B, C に対して, 以下が成り立つ:

(1) $A \sim A$;
(2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
(3) $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

これは要するに, 集合の対等が同値関係であることを意味している.

例 2.1.3. 有限集合 A, B が対等であるための必要十分条件は, それらの元の個数が等しいこと (すなわち $\#A = \#B$).

例 2.1.4 (無限ホテル)**.** 部屋数が $\mathbb{N}$ と対等なホテルがあったとすると, 満室の状態で新規客が来たとしても, 宿泊させることができる.

例 2.1.5. 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, ただし $2\mathbb{N}$ は正の偶数全体の集合;

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$;

(3) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

例 2.1.6. 実数やその区間に対して, 以下が成り立つ:

(1) 全ての閉区間同士は対等;

(2) 全ての開区間同士は対等であり, さらに $\mathbb{R}$ とも対等.

実は開区間と閉空間も対等になるのだが, 全単射を構成するのは容易ではない. 次では, 具体的に全単射を構成せずに集合の対等を示す方法を紹介する.

2.1.2 Bernstein の定理

ここでは, 次の定理の証明する. 教科書では定理の言い換えがいくつか紹介されているが, まとめて述べることにする.

定理 2.1.7 (Bernstein の定理)**.** 集合 A, B に対し, 以下は互いに同値:

(1) $\exists f : A \to B$ (単射) かつ $\exists g : B \to A$ (単射);

(2) $\exists f : A \to B$ (単射) かつ $\exists f' : A \to B$ (全射);

(3) $\exists f : A \to B$ (全射) かつ $\exists g : B \to A$ (全射);

(4) $\exists B_1 \subset B :\ A \sim B_1$ かつ $\exists A_1 \subset A :\ A_1 \sim B$;

(5) $A \sim B$.

定義から (5) $\Rightarrow$ (1) は直ちに従う. また, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) は, 以前に示した「A から B への全射が存在することと, B から A への単射が存在することは同値」から導かれる. (1) $\Leftrightarrow$ (4) は定義に従えばよい. 従って, この定理の証明で難しいのは (1) $\Rightarrow$ (5) である. その証明に現れる議論を, 次の補題にまとめておく.

補題 2.1.8. $f : A \to B$, $g : B \to A$ を単射とする. このとき, 帰納的に $B_0 := B - f(A)$, $A_1 := g(B_0)$, $B_n := f(A_n)$, $A_{n+1} := g(B_n)$ と定めると, 以下が成り立つ:

$$g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad f\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Bernstein の定理を用いることで, 次が示される.

例 2.1.9. 閉空間, 開区間, 半直線, $\mathbb{R}$ は全て対等である.

2.1.3 濃度の概念

集合が対等, あるいは濃度が等しいという概念を前章で定義した. 以下では, 集合 A の濃度を $\mathrm{card}\,A$ で表す. ただし集合の濃度は, 正確に定義しようとすると対等という同値関係に関する同値類のことだが, あまり深入りしないことにする.

定義 2.1.10. 自然数 $\mathbb{N}$ の濃度 $\mathrm{card}\,\mathbb{N}$ を <u>可算濃度</u> といい $\aleph_0$ で表す. 実数 $\mathbb{R}$ の濃度 $\mathrm{card}\,\mathbb{R}$ を <u>連続濃度</u> といい $\aleph$ で表す.

可算濃度と連続濃度が異なることは, 後で示す. ちなみに $\aleph$ は「アレフ」と読む.

2.1.4 濃度の大小

上では濃度が等しいことしか定義していなかったが, 濃度の大小についても自然に定義することができる.

定義 2.1.11. 集合 A, B に対して, $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,B$ (あるいは A の濃度が B の濃度を<u>超えない</u>) とは, 次が成り立つこと: $\exists f : A \to B$: 単射.

ちなみに $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,B$ かつ $\mathrm{card}\,A \neq \mathrm{card}\,B$ であるときに $\mathrm{card}\,A < \mathrm{card}\,B$ と表す. これは濃度が真に小さいことを意味する.

定理 2.1.12. 集合 A, B, C に対して以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,A$;

(2) $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,B$, $\mathrm{card}\,B \leqq \mathrm{card}\,A \Rightarrow \mathrm{card}\,A = \mathrm{card}\,A$;

(3) $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,B$, $\mathrm{card}\,B \leqq \mathrm{card}\,C \Rightarrow \mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,C$.

ちなみに (2) の証明は, Bernstein の定理から直ちに従う. (1) は簡単. (3) は自習問題とする. まとめると, 関係 $\leqq$ を順序と呼んでも差支えない, ということを主張している.

問題 2.1.13 (小テスト 7)**.** 集合 A, B, C に対して次を示せ: $\mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,B$, $\mathrm{card}\,B \leqq \mathrm{card}\,C \Rightarrow \mathrm{card}\,A \leqq \mathrm{card}\,C$. ただし単射に関する性質は証明なしで使って良い.

2.2　可算集合・非可算集合

2.2.1　可算集合

可算濃度を $\aleph_0 = \operatorname{card}\mathbb{N}$ で表していた．一般に，可算濃度をもつ集合を 可算集合 あるいは 可付番集合 という．可算集合は，無限集合の中で最も小さい．

定理 2.2.1. 任意の無限集合は，可算集合を部分集合として含む．

証明は，直観的には当然なのだが，厳密に示そうとすると選択公理が必要になる．ここではあまり深入りしない．

定義 2.2.2. 集合 A が 高々可算 であるとは，$\operatorname{card} A \leqq \aleph_0$ となること．

したがって，高々可算な集合は，可算集合または有限集合である．

2.2.2　可算集合の性質

定理 2.2.3. 以下が成り立つ:

(1) A, B が高々可算のとき，$A \times B$ も高々可算;

(2) 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，Λ が高々可算，各 A_λ も高々可算のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も高々可算．

いずれの場合も，濃度が $\aleph_0$ 以下であることを示せば良い．(1) については，$A \times B$ から可算集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ への単射を作れば良い．(2) については，可算集合 $\Lambda\times\mathbb{N}$ から $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ への全射を作れば良い．

系 2.2.4. $\mathbb{Q}$ は可算集合．

証明では，可算集合から $\mathbb{Q}$ への全射を作る方法が簡単．前に紹介した例と合わせて，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ が可算集合であることが分かった．

2.2.3　連続の濃度, 非可算集合

既にアナウンスだけしてきたが, ここでは, $\mathbb{R}$ が可算でないことを示す. 濃度の記号を使って述べると, 次のようになる.

定理 2.2.5. $\aleph_0 < \aleph$. すなわち, 連続濃度は可算濃度よりも真に大きい.

証明は, 対角線論法によって与える. $\mathbb{R}$ と開区間 $(0,1)$ は対等だったので, $(0,1)$ が可算でないことを示せばよい. その証明の基本的なアイデアは, 次を見ると分かる.

例題 2.2.6. n 桁の自然数が n 個ある. これらと異なる n 桁の自然数を作るアルゴリズムを見付けよ.

2.2.4　巾集合の濃度

ここまでに紹介したように, $\aleph_0 < \aleph$ であり, $\aleph_0$ は無限集合の濃度の中で最小であった. ここでは, 最大の濃度はない, すなわち, いくらでも大きな濃度の集合が存在する, ということを紹介する.

定理 2.2.7. M を集合, $\mathfrak{P}(M)$ を M の巾集合とする. このとき $\operatorname{card} M < \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$.

巾集合 $\mathfrak{P}(M)$ とは, M 内の部分集合全体の集合であった. 証明のためには

$$\operatorname{card} M \leqq \operatorname{card} \mathfrak{P}(M), \quad \operatorname{card} M \neq \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$$

を示せば良い. 前者は容易. 後者のためには, 任意の写像 $f : M \to \mathfrak{P}(M)$ が全射ではないことを示せば良い. 例えば, 次が像に入らない:

$$B := \{y \in M \mid y \notin f(y)\}.$$

注意 2.2.8. 上の定理により, 例えば $\mathbb{R}$ の巾集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, その巾集合 $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R}))$, と次々に取っていくことにより, いくらでも大きい濃度の集合を構成することができる.

2.3　濃度の演算

2.3.1　濃度の和と積

集合 A, B に対して, これらの元を別物だと思って和集合を取る操作を 非交和 といい, 記号 $A \sqcup B$ あるいは $A \coprod B$ で表す. 例えば $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

命題 2.3.1. $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A'$, $\operatorname{card} B = \operatorname{card} B'$ のとき, $\operatorname{card}(A \sqcup B) = \operatorname{card}(A' \sqcup B')$. すなわち, $\operatorname{card}(A \sqcup B)$ は $\operatorname{card} A$ と $\operatorname{card} B$ のみに依存し, A, B の取り方に依らない.

この命題により, 集合の濃度の和を定義することができる.

定義 2.3.2. $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ を集合の濃度とする. このとき $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} := \operatorname{card}(A \sqcup B)$ と定める. ただしここで, A, B は $\mathfrak{m} = \operatorname{card} A$, $\mathfrak{n} = \operatorname{card} B$ となる集合.

先の命題より, この定義は well-defined である. より正確に言うと, 濃度 $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ は, 集合 A と B の取り方に依存しない.

命題 2.3.3 (自習用)**.** 集合の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ に対し, 以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$;

(2) $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p} = \mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p})$;

(3) $\mathfrak{m} + 0 = \mathfrak{m}$;

(4) $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{n}' \Rightarrow \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$.

ちなみにここで, $0 = \operatorname{card} \emptyset$ である. 命題の証明は自習とするが, 何をやれば良いかが分かれば, それで十分だと思われる.

定義 2.3.4. $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ を集合の濃度とする. このとき $\mathfrak{m}\mathfrak{n} := \operatorname{card}(A \times B)$ と定める. ただしここで, A, B は $\mathfrak{m} = \operatorname{card} A$, $\mathfrak{n} = \operatorname{card} B$ となる集合.

問題 2.3.5 (小テスト 8)**.** 集合の濃度の積 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ が well-defined であることを示せ. ただし証明中で, 構成した写像が全単射であることの証明は省略して良い.

2.3.2 濃度の巾

ここでは, 前章で定義した濃度の和と積に続いて, 濃度の巾を定義する. そのために, 次で定義される配置集合を用いる:

$$\mathfrak{F}(A, B) := \{f : A \to B : \text{写像}\}.$$

定義 2.3.6. $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ を集合の濃度とする. このとき $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} := \operatorname{card}\mathfrak{F}(A, B)$ と定める. ただしここで, A, B は $\mathfrak{m} = \operatorname{card} A$, $\mathfrak{n} = \operatorname{card} B$ となる集合.

濃度の和と積の場合と同様に, 濃度の巾も well-defined である. すなわち, 集合 A, B の取り方に依存しない.

命題 2.3.7. $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A'$, $\operatorname{card} B = \operatorname{card} B'$ のとき, $\operatorname{card}\mathfrak{F}(A, B) = \operatorname{card}\mathfrak{F}(A', B')$. すなわち, $\operatorname{card}\mathfrak{F}(A, B)$ は $\operatorname{card} A$ と $\operatorname{card} B$ のみに依存し, A, B の取り方に依らない.

証明のためには, $\mathfrak{F}(A, B)$ から $\mathfrak{F}(A', B')$ への全単射を構成すれば良い. 構成した写像が全単射であることを示す時は, 定義に従う方法と逆写像を構成する方法の二通りが考えられる. いずれにせよ, このような「写像の集合」はこれから様々な場面で登場するので, その取り扱いには慣れておくと良い.

定理 2.3.8. 0 でない集合の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ に対し, 以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$;
(2) $(\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$;
(3) $(\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$.

これらは, 集合の濃度の巾に対して指数法則が成り立つ, ということを意味する. 証明のためには, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ を濃度とする集合 M, N, P をとり, 然るべき集合の間の全単射を構成すれば良い.

問題 2.3.9 (小テスト 9)**.** 以下で定める写像 f, g に対して, $f \circ g$ が恒等写像であることを示せ:

$$\begin{aligned}
&f : \mathfrak{F}(N, \mathfrak{F}(M, P)) \to \mathfrak{F}(M \times N, P), \\
&\qquad f(F) : M \times N \to P : (m, n) \mapsto (F(n))(m), \\
&g : \mathfrak{F}(M \times N, P) \to \mathfrak{F}(N, \mathfrak{F}(M, P)), \\
&\qquad g(F') : N \to \mathfrak{F}(M, P) : n \mapsto F'(\cdot, n).
\end{aligned}$$

2.3.3　濃度 $\aleph_0$, $\aleph$ に関する演算

前に述べたように, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ は対等ではない. すなわち $\aleph_0 < \aleph$ が成立する. 一方で, 巾集合をとると濃度が真に大きくなることから, $\mathbb{N}$ よりも $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ は濃度が真に大きい. 濃度の言葉で書くと $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. ここでは, 可算濃度と連続濃度に関する演算を調べ, $\mathbb{R}$ と $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ が対等であること, すなわち $\aleph = 2^{\aleph_0}$, などの性質を示す.

定理 2.3.10. $\mathfrak{a} := \aleph_0$, $\mathfrak{c} := \aleph$ とおき, $\mathfrak{n}$ を集合の濃度とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{n} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;

(2) $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{n} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(3) $1 \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{n}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;

(4) $2 \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{n}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$;

(5) $1 \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{n}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$;

(6) $2 \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{c} \Rightarrow 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{c}}$.

証明だが, (1) と (2) は定義に従えば自然にできる. (3) は,「$\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a}$」と「$\mathfrak{n}$ が高々可算であること」は同値なので, 以前に示した性質に帰着される. (4) は, $2 \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a}$ という仮定の下で, $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{a}}$ $(= 10^{\mathfrak{a}})$ および $2^{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{c} \leqq 10^{\mathfrak{a}}$ を示す. 前者は $\mathfrak{n} \leqq 2^{\mathfrak{n}}$ から従う. 後者は, $(0, 1)$ の元は 2 進数表示でも 10 進数表示でも無限小数で書くことができる, という話と関係する.

系 2.3.11. 以下の集合は全て $\mathbb{R}$ と対等, すなわち, 連続濃度をもつ:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}, \quad \mathfrak{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

第 3 章

順序集合, Zorn の補題

3.1 順序集合

3.1.1 順序関係

同値関係の項で説明したように, 集合 A 上の関係とは, A の 2 元に対して命題を定めるものであった. ここでは, 同値関係ではなく, 順序関係を定義する.

定義 3.1.1. A を集合, $\leqq$ を A 上の関係とする. このとき $\leqq$ が A 上の 順序 であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) $\forall a \in A,\ a \leqq a$;

(2) $\forall a, b \in A,$ "$a \leqq b,\ b \leqq a \Rightarrow a = b$";

(3) $\forall a, b, c \in A,$ "$a \leqq b,\ b \leqq c \Rightarrow a \leqq c$".

順序をいきなり $\leqq$ という記号で書いているが, 当然ながら順序の典型例は, 数の大小関係である. それ以外の順序もいろいろある.

例 3.1.2. $\mathbb{R}$ およびその部分集合に対して, 通常の大小関係 $\leqq$ は順序である.

例 3.1.3. $\mathbb{N}$ に対して, 次の $\prec$ は順序である: $a \prec b :\Leftrightarrow b/a \in \mathbb{N}$.

ここで定義した $\prec$ を 整除関係 という. 記号 $a \mid b$ で表すこともある.

例 3.1.4. X を集合とする. 包含関係 $\subset$ は, 巾集合 $\mathfrak{P}(X)$ の上の順序である.

定義 3.1.5. 集合 A 上の順序 $\leqq$ が 全順序 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in A$, $a \leqq b$ または $b \leqq a$.

全順序と対比して, 一般の順序のことを 半順序 ということもある.

例 3.1.6. $\mathbb{R}$ 上の通常の大小関係は, 全順序である. $\mathbb{N}$ 上の整除関係 $\prec$, および ($\#X > 1$ のとき) 巾集合 $\mathfrak{P}(X)$ 上の包含関係 $\subset$ は, 全順序でない.

集合 X が元の個数が少ない有限集合の場合には, 集合の元を頂点とし, 順序関係を矢印で表して繋いだグラフを描くと, 状況が分かりやすい. このような図を ハッセ図 という.

ちなみに, 国語辞典や英和辞典が成り立っているのは, 辞書に載せる単語全体の集合に全順序が定められているからである. その順序の規則を理解しているから, 辞書を引くことができる.

問題 3.1.7 (Quiz)**.** 集合 $\mathbb{R}^2$ には, 通常の意味での大小関係は定義されず, 例えばノルムの大きさで比較したものは順序ではない. それ以外の方法で, 頑張って順序を定義せよ. 可能であれば全順序が望ましい.

3.1.2 順序集合, 部分順序集合

定義 3.1.8. 集合 A とその上の順序 $\leqq$ の組 $(A, \leqq)$ を 順序集合 という. 特に $\leqq$ が全順序のときには, 組 $(A, \leqq)$ を 全順序集合 という.

命題 3.1.9. $(A, \leqq)$ を順序集合とし, $M \subset A$ とする. このとき次で定義される $\leqq_M$ は M 上の順序: $m \leqq_M n :\Leftrightarrow m \leqq n$.

上の方法で得られる順序集合 $(M, \leqq_M)$ を 部分順序集合 という. このとき $\leqq_M$ は単に $\leqq$ で表すことが多い. 実数と整数の不等号をわざわざ違う記号で書かないのと同様.

命題 3.1.10 (自習用)**.** 全順序集合の部分順序集合は, 全順序である.

3.2　最大元, 極大元, 上限, 下限

以下, $(A, \leqq)$ を順序集合とする. ここでは最大元, 極大元, 上に有界, 上限, といった概念を紹介する. 全く同様に最小元, 極小元, 下に有界, 下限, といった概念も定義できる.

定義 3.2.1. 順序集合 $(A, \leqq)$ に対し, $a \in A$ が <u>最大元</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A,\ x \leqq a$.

最大元や最小元は, 実数の集合の最大値・最小値を一般化したものである. 例えば半直線 $[0, +\infty)$ に通常の順序を入れた場合は, 0 が最小元であり, 最大元は存在しない.

命題 3.2.2. 順序集合 $(A, \leqq)$ の最大元は, 存在すれば一意的.

定義 3.2.3. 順序集合 $(A, \leqq)$ に対し, $a \in A$ が <u>極大元</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A,\ a \not< x$.

ただしここで $a < x$ とは, $a \leqq x$ かつ $a \neq x$ が成立すること. すなわち極大元であるとは, それより真に大きい元が存在しないこと.

命題 3.2.4. 順序集合 $(A, \leqq)$ の最大元は極大元である.

例 3.2.5. 集合 $A := \mathbb{N} - \{1\}$ に整除関係 $\prec$ で順序を定める. このとき, A に最小元は存在しない. また, $a \in A$ が極小元であることと, a が素数であることは同値.

例 3.2.6. 集合 X の巾集合 $\mathfrak{P}(X)$ に包含関係 $\subset$ で順序を定める. このとき $\emptyset$ が最小元, X が最大元. 一方で, A を X 内の真部分集合全体とすると $(A = \mathfrak{P}(X) - \{\emptyset, X\})$, 最大元と最小元は存在しない. 極小元と極大元は一般に複数ある.

問題 3.2.7 (小テスト 10)**.** $(A, \leqq)$ が全順序集合のとき, 極大元は最大元となることを示せ.

実数の集合の場合と同様に, 上界や上に有界といった概念を定義することができる.

定義 3.2.8. M を順序集合 $(A, \leqq)$ 内の部分集合とする. このとき

(1) $a \in A$ が M の <u>上界</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in M,\ x \leqq a$;
(2) M が <u>上に有界</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists a \in A : a$ は M の上界.

下界および下に有界という概念も, 同様に定義する. 上にも下にも有界のときは, 単に <u>有界</u> であるという.

定義 3.2.9. M を順序集合 $(A, \leqq)$ 内の部分集合とする．このとき, $a \in A$ が M の 上限 であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) a は M の上界;
(2) $\forall a' \in A$ (a' は M の上界), $a \leqq a'$.

M の上限を $\sup M$ で表し, 同様に定義される下限を $\inf M$ で表す．なお, 上限のことを 最小上界 ということもある．上に有界だとしても上限が存在するとは限らない．

例 3.2.10. $(\mathbb{Q}, \leqq)$ において, $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は上に有界だが, 上限は存在しない．

この例では, 全体集合を $\mathbb{Q}$ にしていることがポイント．$\mathbb{R}$ の場合には,「空でない上に有界な集合は上限をもつ」という性質が知られている．これを 実数の連続性 という．

3.2.1　順序同型

以下では, $(A, \leqq)$, $(A', \leqq')$ を順序集合とする．

定義 3.2.11. 写像 $f : A \to A'$ が 順序写像 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in A$ $(a \leqq b)$, $f(a) \leqq' f(b)$.

命題 3.2.12. 順序写像 $f : A \to A'$ が次をみたすとする: $\forall a, b \in A$ $(f(a) \leqq' f(b))$, $a \leqq b$. このとき f は単射.

上の命題の性質をみたす順序写像を 順序単射 という．全射な順序単射を 順序同型写像 という．2 つの順序集合が 順序同型 とは, これらの間に順序同型写像が存在すること．

問題 3.2.13 (自習用)**.** 順序写像かつ単射だが, 順序単射でない例を作れ.

3.2.2　双対概念

ここでは双対順序という概念を紹介する．要するに「順番を逆にする」操作である．特に新しいものが出来る訳ではないが, 上限と下限が逆になることには注意.

定義 3.2.14. 順序集合 $(A, \leqq)$ に対し, 次で定義される順序 $\leqq^{-1}$ を 双対順序 という: $a \leqq^{-1} b :\Leftrightarrow b \leqq a$.

双対順序が順序であることの証明は, 簡単な演習問題．双対順序は, 元の順序の情報をほとんど全て保つ．例えば, 全順序の双対順序は全順序である．

3.3　整列集合とその比較定理

標語的に述べると次のようになる: 整列集合 $\subset$ 全順序集合 $\subset$ 順序集合.

3.3.1　整列集合

定義 3.3.1. 全順序集合 $(W, \leqq)$ が <u>整列集合</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall A \subset W\ (A \neq \emptyset)$, A は最小元をもつ.

注意 3.3.2. 上の定義において, $(W, \leqq)$ は順序集合としても同値である. 実際, 順序集合 $(W, \leqq)$ が「$\forall A \subset W\ (A \neq \emptyset)$, A は最小元をもつ」をみたすとき, $(W, \leqq)$ は自動的に全順序集合になる. (ヒント: A として二点集合を考えよ.)

例 3.3.3. 以下は整列集合:

(1) $\mathbb{N}$;
(2) 有限の全順序集合;
(3) 整列集合の部分集合. (復元推奨)

定義より, 整列集合 $(W, \leqq)$ には最小元が存在する. 当然ながら, 逆は成立しない.

例 3.3.4 (復元推奨)**.** $\mathbb{Z}$ や $[0, +\infty)$ に自然な順序を入れたものは, 整列集合でない.

この例は, 自然な順序について述べており,「整列集合にならない」ということは主張していないことに注意する. 他の順序を入れたものが整列集合になることはあり得る.

例 3.3.5. 以下は整列集合である:

(1) $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に自然な順序を入れたもの;
(2) $\mathbb{N} \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\}$ に自然な順序を入れたもの;
(3) $\mathbb{N}$ に次の順序 $\leqq'$ を入れたもの:

$$a \leqq' b :\Leftrightarrow \begin{cases} a \leqq b \quad (a, b \text{ が共に偶数または共に奇数のとき}), \\ a \text{ が奇数かつ } b \text{ が偶数}. \end{cases}$$

上の (3) の順序は次のようなものである: $1 < 3 < 5 < \cdots < 2 < 4 < \cdots$.

定義 3.3.6. A を全順序集合とし, $a, b \in A$ とする. b が a の <u>直後の元</u> (あるいは a が b の <u>直前の元</u>) であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $a < b$;
(ii) $\nexists x \in A : a < x < b$.

命題 3.3.7. $(W, \leqq)$ を整列集合とすると, 以下が成り立つ:

(1) $\min W$ が存在;

(2) $\forall a \in W$ $(\{x \in W \mid a < x\} \neq \emptyset)$, $\exists a' \in W : a'$ は a の直後の元.

上の (2) は直観的には, a の後に元があるなら直後の元がある, ということができる. ちなみに, 直前の元は存在するとは限らない.

例 3.3.8. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に自然な順序を入れた整列集合において, ∞ には直前の元は存在しない.

3.3.2 切片 (と超限帰納法)

定義 3.3.9. $(W, \leqq)$ を整列集合とし, $a \in W$ とする. このとき次を a による 切片 という: $W\langle a\rangle := \{x \in W \mid x < a\}$.

定義から明らかに, $a = \min W$ と $W\langle a\rangle = \emptyset$ は同値.

例 3.3.10. 以下, 自然な順序に関して, 切片は次をみたす:

(1) $W = \mathbb{N}$ のとき, $W\langle n\rangle = \{1, 2, \ldots, n-1\}$;

(2) $W = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ のとき, $W\langle\infty\rangle = \mathbb{N}$.

3.3.3 整列集合の順序同型

教科書の順番とは前後するが, 話の見通しを良くするため, ここでの目的である比較定理の主張を先に述べておく. 2 つの整列集合は "比較できる" ことを主張する.

定理 3.3.11 (比較定理)**.** $(W, \leqq)$, $(W', \leqq')$ を整列集合とすると, 以下のいずれかが成り立つ (さらに, 1 つだけが成り立つ):

(1) $W \simeq W'$;

(2) $\exists 1 a' \in W' : W \simeq W'\langle a'\rangle$;

(3) $\exists 1 a \in W : W\langle a\rangle \simeq W'$.

ここで, $\simeq$ は順序同型を表す. この定理の主張のうち, まずここでは, 上記の (1), (2), (3) のいずれかが同時には起きないことを示す. 次は基本的な準備.

補題 3.3.12. $(W, \leqq)$ を整列集合, $f : W \to W$ を順序単射とする. このとき次が成り立つ: $\forall x \in W,\ f(x) \geqq x$.

証明は背理法. 結論の否定を仮定すると, $\{a \in W \mid f(a) < a\} \neq \emptyset$ が成り立つので, 整列集合の仮定が使える. この補題を使うと次の (1) が従う ((2) は (1) から従う).

補題 3.3.13. $(W, \leqq)$ を整列集合とすると, 以下が成り立つ:

(1) $\forall a \in W,\ W \not\simeq W\langle a\rangle$;

(2) $\forall a, b \in W\ (a \neq b),\ W\langle a\rangle \not\simeq W\langle b\rangle$.

この補題を使うと, 比較定理の後半 (背反性) の証明は容易. その際には次を用いる.

問題 3.3.14 (小テスト 11)**.** $(W, \leqq)$, $(W', \leqq')$ を整列集合, $f : W \to W'$ を順序同型写像とし, $a \in W$ とする. このとき次を示せ: $f(W\langle a\rangle) = W'\langle f(a)\rangle$.

また, 同じく上の補題を用いることで, 次を示すことができる.

命題 3.3.15. 整列集合の間の順序同型は, 存在すれば一意的である. すなわち, $(W, \leqq)$, $(W', \leqq')$ を整列集合とし, $f, g : W \to W'$ が順序同型であるとき, $f = g$.

3.3.4　整列集合の比較定理

比較定理の主張は既に述べ, 後半部分も証明した. ここでは前半部分の証明を行う. 以下では $(W, \leqq)$, $(W', \leqq')$ を整列集合とする. また, 次の記号を使う:

$$J := \{x \in W \mid \exists x' \in W' : W\langle x\rangle \simeq W'\langle x'\rangle\},$$
$$J' := \{x' \in W' \mid \exists x \in W : W\langle x\rangle \simeq W'\langle x'\rangle\}.$$

補題 3.3.16. J は次をみたす: 「$\forall x \in J,\ \forall y \in W\ (y < x),\ y \in J$」. 従って, $J = W$ または J は W の切片である.

当然ながら, J' も同様の性質をみたす.

補題 3.3.17. 上の記号のもとで, $J \simeq J'$.

J は W または W の切片, J' も W' または W' の切片である. 従って可能性としては 4 パターンあるが, そのうち 1 つは起こり得ないことが分かる.

補題 3.3.18. 上の記号のもとで, $J = W\langle a\rangle$ かつ $J' = W'\langle a'\rangle$ となることはない.

最後の補題で除外されたものを除く 3 パターンの場合が, 比較定理で主張されている 3 個の項目に, それぞれ該当する.

3.3.5　期末試験と事前救済レポート

8/01(火) 授業時に期末試験を行う (教室が通常と異なることに注意). 7/28(金) までに事前救済レポートを提出しても良い. 問題は「(1) 集合と写像, (2) 同値関係, (3) 集合の濃度, (4) 順序集合, に関する期末試験の問題を予想し, その問題と解答を書け」. レポートは, 1 枚目に問題・学生番号・氏名を書き, 2 枚目以降に解答を書き, 必ず綴じること. 表紙を付けてはならない.

3.4　Zorn の補題, 整列定理

ここでは Zorn の補題と, その応用について述べる. 話の順番を教科書とは少し入れ替え, また Zorn の補題の証明は一部省略する.

3.4.1　Zorn の補題

ここでは Zorn の補題の主張と, 証明の概略を述べる. まずは, 主張の中に登場する用語を準備する. ちなみに上限とは, 上界のなかで最小のものだった.

定義 3.4.1. 順序集合 $(A, \leqq)$ が <u>帰納的</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall W \subset A$ (W は空でない全順序集合), W は上限をもつ.

例 3.4.2. 以下が成り立つ:

(1) 有限な順序集合は帰納的;
(2) 通常の順序に関して, $\mathbb{N}$ は帰納的でないが, $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は帰納的.

次が Zorn の補題である. ここで, 順序集合の元が極大とは, それより大きい元が存在しないことだった.

定理 3.4.3 (Zorn の補題)**.** 帰納的な順序集合は, 少なくとも 1 つの極大元をもつ.

Zorn の補題の対偶をとると, 極大元をもたない順序集合は, 帰納的ではない. これを示すための鍵となるアイデアが, 次の補題である. ちなみに証明には選出公理を用いる.

補題 3.4.4. 順序集合 $(A, \leqq)$ が極大元をもたないとすると, 次が成り立つ: $\exists \varphi : A \to A$ (写像) : $\forall x \in A$, $\varphi(x) > x$.

3.4.2 整列定理

Zorn の補題を用いることで, 次の整列定理が示される. 整列定理は, 任意の集合の元は“整列できる”ことを主張する.

定理 3.4.5 (Zermelo の整列定理)**.** 任意の集合 A に対して, 次が成り立つ: $\exists \leqq$ (A 上の順序) : $(A, \leqq)$ は整列集合.

証明には Zorn の補題を本質的に用いる. そのためには, 帰納的な順序集合を作る必要がある. 次の補題は, その手続きを与える.

補題 3.4.6. A を集合とし, 次を考える:

$$\mathfrak{M} := \{(W, O) \mid W \subset A,\ O \text{ は } W \text{ 上の順序},\ (W, O) \text{ は整列集合 }\}.$$

このとき $\mathfrak{M}$ は“等しいか切片である”という順序によって, 帰納的な順序集合となる.

従って Zorn の補題より, この $\mathfrak{M}$ には極大元が存在する. その極大元が W 自身に一致することを示せば良い. このことは次の補題から従う.

補題 3.4.7. $(W, \leqq)$ を整列集合とする. このとき, $W \sqcup \{\infty\}$ に“自然な順序”を入れたものは整列集合.

以上により, Zorn の補題から整列定理が導かれた. 一方で, Zorn の補題の証明には選出公理が用いられていた. ここで次のことに注意しておく.

注意 3.4.8. Zermelo の整列定理が成り立つと仮定すると, 選出公理が導かれる. 従って, 選出公理, Zorn の補題, 整列定理は, 全て互いに同値な命題である.

上の整列定理と, 整列集合の比較定理を用いると, 次のような集合の濃度の比較定理が導かれる.

定理 3.4.9. 任意の 2 つの濃度は比較可能. すなわち, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ を集合の濃度とすると, $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$ または $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ のいずれかが成り立つ.