第 1 章

平面曲線の曲率

なめらかな平面曲線の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

1.1　曲線の助変数表示

以下，I は $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合を表すものとする．なお，$\mathbb{R}^2$ の元はスペースの都合で横ベクトルで表しているが，縦ベクトルと思っておいた方が便利なことが多い．

定義 1.1.1　写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が <u>なめらかな曲線</u> とは，次が成り立つこと：

(i)　c は C^∞ 級．

(ii)　$\forall t \in I$，$c'(t) \neq (0, 0)$．

ベクトル $c'(t)$ を <u>速度ベクトル</u> と呼ぶ．像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び，写像 c あるいは $c(t)$ をその <u>助変数表示</u> と呼ぶこともある．

例 1.1.2　次の (1)，(2) はなめらかな曲線であり，(3)，(4) はなめらかな曲線ではない：

(1)　（半径 $r > 0$ の円）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$．

(2)　（C^∞ 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ のグラフ）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$．

(3)　（$y = |x|$ のグラフ）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$．

(4)　（単純カスプ）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$．

1.2　曲線の曲率の定義

定義 1.2.1　なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して，次の $\kappa(t)$ を <u>曲率</u> と呼ぶ：

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

写像 κ そのものを曲率，あるいは曲率関数と呼ぶこともある．曲線を $c(t) = (x(t), y(t))$ とおくと，曲率の定義式の分母と分子は，それぞれ以下のように表される：

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$
$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

定義より $|c'(t)| \neq 0$ であるから，曲率の分母は 0 にならないことに注意する．

例 1.2.2　半径 $r > 0$ の円の曲率に対して，以下が成り立つ：

(1)　$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすると，$\kappa(t) = 1/r$.

(2)　定数 $a \neq 0$ を用いて $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ とすると，$a > 0$ なら $\kappa(t) = 1/r$，$a < 0$ なら $\kappa(t) = -1/r$.

問題 1.2.3　半径 $r > 0$ の円の上半分を $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと思って，$c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ を考える（ただし $t \in (-r, r)$）．このときの曲率 $\kappa(t)$ を求めよ．

問題 1.2.4（小テスト 1）　楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の曲率を計算し，曲率の絶対値が最大になる点と最小になる点を求めよ．ただし $a > b > 0$ とする．

1.3　曲率の性質：合同での不変性

この章では，曲線の曲率が，回転や平行移動をしても変わらないことを紹介する．そのために，まずは回転や平行移動の定義を復習する．

定義 1.3.1　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，

(1)　c_1 と c_2 が <u>向きを保つ合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{SO}(2)$，$\exists v \in \mathbb{R}^2$: $\forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

(2)　c_1 と c_2 が <u>合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{O}(2)$，$\exists v \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

上記において，$g \in \mathrm{SO}(2)$ は回転を表し，$v \in \mathbb{R}^2$ は平行移動を表す．また，$g \in \mathrm{O}(2)$ による変換は，回転と折り返しの合成を表す．

命題 1.3.2　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．もし c_1 と c_2 が向きを保つ合同であるならば，両者の曲率は等しい．すなわち次が成り立つ：$\kappa_{c_1} = \kappa_{c_2}$.

問題 1.3.3　なめらかな曲線を折り返すと，その曲率は -1 倍されることを示せ．

1.4　復習：合成写像の微分

ここでは，合成写像の微分の公式，いわゆるチェインルールを復習する．ここでは, 表記を簡単にするために，ヤコビ行列を用いて書く.

定義 1.4.1　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．また，$\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表し，$f = (f_1, \ldots, f_n)$ とおく．このとき次を f の $p \in \mathbb{R}^m$ における ヤコビ行列 と呼ぶ：

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

命題 1.4.2（合成写像の微分）　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とし，$p \in \mathbb{R}^m$ とする．このとき次が成り立つ：$(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

これらの行列を成分で表すと, 通常のよくみるチェイン・ルールになっている.

1.5　曲率の性質：パラメータ変換での不変性

ここでは，曲線の曲率が助変数表示の取り方に依存しないことを示す．直感的には，道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない，ということと同様．以下では I，I' を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする.

定義 1.5.1　写像 $t : I' \to I$ が 正のパラメータ変換 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　全単射.
(ii)　C^∞ 級.
(iii)　$\forall s \in I'$，$t'(s) > 0$.

上記の条件のうち (iii) を「$\forall s \in I'$, $t'(s) < 0$」に置き換えたものを 負のパラメータ変換 と呼ぶ．正のパラメータ変換は，車の走行で言うと「走り方は変えても方向は変えない」ことに対応する.

命題 1.5.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし，$t : I' \to I$ を正のパラメータ変換とする．このとき以下が成り立つ：

(1)　$c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線.
(2)　$\forall s \in I'$，$\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c \circ t}(s)$.

すなわち，曲線の曲率は正のパラメータ変換で不変である．また，負のパラメータ変換をすると曲率は -1 倍される．ここで，κ_c と $\kappa_{c \circ t}$ はそれぞれ c と $c \circ t$ の曲率を表す.

1.6　曲率の意味：加速度

ここでは，助変数表示を車の走行と考え，曲率が「一定の速度で走ったときの加速度」を表すことを示す．当然ながら，大きな加速度を感じる道路の方が大きく曲がっている．

定義 1.6.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，c が 弧長パラメータ表示 であるとは，次が成り立つこと：$\forall t \in I$，$|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが「一定の速度（速さ 1）で走る」ことに対応する．次の命題は，「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを意味する．

命題 1.6.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき次が成り立つ：$\exists t = t(s)$（正のパラメータ変換）：$c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

上記の証明には逆関数定理を用いる（今回は省略）．結論としては，どんな道路でも速さ 1 で走ることができる．そのときの加速度を表示するために，次のベクトルを用いる．

定義 1.6.3　$c(t) = (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とする．このとき，次を（左向きの）単位法ベクトル と呼ぶ：$n(t) := (-y'(t), x'(t))$.

上記の単位法ベクトルは，$\mathbb{R}^2$ のベクトルを縦で書いて，次のように表すと意味が分かりやすい：

$$\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

命題 1.6.4　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$，$c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

特に $|c''| = |\kappa_c|$ が成り立つ．すなわち，曲率の絶対値は，加速度ベクトル c'' の大きさと一致する．これが曲率の意味の一つである．

1.7　曲率の意味：単位法ベクトルの微分

弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対し，単位法ベクトルは $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ で定義されていた．ここでは，曲率は $n(t)$ の微分と考えることができることを述べる．

定義 1.7.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とし，$e(t) := c'(t)$ とおく．このとき，$\{e(t), n(t)\}$ を **Frenet 標構** と呼ぶ．

命題 1.7.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$, $n'(t) = -\kappa_c(t) e(t)$.

問題 1.7.3（小テスト 2）　上の命題を示せ．

命題 1.6.4，1.7.2 を合わせて書くと，次のようになる．

命題 1.7.4（Frenet の公式）　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき, Frenet 標構 $\{e(t), n(t)\}$ に対して，次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Frenet の公式を用いることで，次を示すことができる．

定理 1.7.5（平面曲線の基本定理）　任意の C^∞-関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して，κ を曲率とする曲線の弧長パラメータ表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が，向きを保つ合同を除いて一意的に存在する．

第 2 章

曲面の曲率

なめらかな曲面の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

2.1　曲面の助変数表示

以下，D は $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合を表すものとする．

定義 2.1.1　写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が なめらかな曲面 とは，以下が成り立つこと：

(i) φ は C^∞ 級．

(ii) $\forall (u, v) \in D$，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$．

ここで $(J\varphi)_{(u,v)} := (\varphi_u, \varphi_v)_{(u,v)}$ は Jacobi 行列である（ただし φ_u，φ_v は偏微分を表す）．このとき，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$ となるための必要十分条件は，$\{\varphi_u, \varphi_v\}$ が一次独立となること．

例 2.1.2　以下はなめらかな曲面である：

(1)（xy 平面）$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, 0)$．

(2)（曲線の平行移動）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線としたとき，$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), v)$．

例 2.1.3　以下はなめらかな曲面でない：

(1) (一点) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (0, 0, 0)$．

(2) (曲線) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$．

(3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u^3, u^2, v)$．

これらの例から分かるように，定義の条件 (ii) を「$(J\varphi)_{(u,v)}$ は零行列でない」とすると，条件が弱くなりすぎる．

2.2 回転面

なめらかな曲線が所定の条件をみたしているとき，それを回転させてなめらかな曲面を作ることができる．

命題 2.2.1 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線とし，次をみたすと仮定する：$\forall t \in I$，$x(t) > 0$．このとき，次はなめらかな曲面である：

$$\varphi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

上のように定義された φ を，曲線 c の <u>回転面</u> と呼ぶ．これは，c を xz 平面内の曲線だと思って，それを z 軸を中心に回転させたものに他ならない．

例 2.2.2 以下はなめらかな曲面である：

(1) (円柱) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

(2) (球面) $\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$.

(3) (トーラス) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u(2 + \cos v), \sin u(2 + \cos v), \sin v)$.

これらの例は全て回転面である．上で与えた球面の助変数表示は，球面の一部しか表していないことに注意する（定義域を $\mathbb{R}^2$ に拡げたものは助変数表示にはならない）．

2.3　曲面の曲率の定義

なめらかな曲面の曲率を定義する．曲線の曲率は単位法ベクトルを用いて表すことができたが，曲面の曲率にも単位法ベクトルが登場する．

定義 2.3.1　$a = {}^t(a_1, a_2, a_3)$，$b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，次を ベクトル積 と呼ぶ：

$$a \times b := {}^t\left(\det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right).$$

定義より，$a \times b$ は a と b の両方に直交する．また，$a \times b = 0$ となるための必要十分条件は，a と b が一次従属となることである．

定義 2.3.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，次を φ の 単位法ベクトル と呼ぶ：

$$n(u, v) := \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)/|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)|.$$

なめらかな曲面の定義より，$\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ が成り立つことに注意する．

定義 2.3.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　$E := \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$，$F := \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$，$G := \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ を 第一基本量 と呼ぶ．

(2)　$L := \langle \varphi_{uu}, n \rangle$，$M := \langle \varphi_{uv}, n \rangle$，$N := \langle \varphi_{vv}, n \rangle$ を 第二基本量 と呼ぶ．

(3)　以下をそれぞれ 第一基本行列，第二基本行列 と呼ぶ：

$$\widehat{\mathrm{I}} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathrm{II}} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

(4)　$A := \widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{II}}$ を 形作用素 と呼ぶ．

(5)　$K := \det(A)$ を ガウス曲率，$H := (1/2)\mathrm{tr}(A)$ を 平均曲率 と呼ぶ．

形作用素 A が定義されるためには，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}$ が逆行列をもつことを確かめなくてはならない．このことは，後で示す．

2.4　曲面の曲率の例

ここでは，いくつかの簡単な曲面に対して，そのガウス曲率と平均曲率を求める．

例 2.4.1　ガウス曲率 K，平均曲率 H について，以下が成り立つ：

(1)　平面に対して，$K = H = 0$.

(2)　（半径 $r > 0$ の円柱）$\varphi(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$ に対して，

$$A = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = 0, \quad H = -1/(2r).$$

(3)　（半径 $r > 0$ の球面）$\varphi(u, v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$ に対して，$K = 1/r^2$，$H = -1/r$.

問題 2.4.2（小テスト 3）　半径 $r > 0$ の球面のガウス曲率と平均曲率を，上記の助変数表示を用いて，実際に計算せよ．

例 2.1.2 で紹介したように，曲線 c を z 軸方向に平行移動させることで曲面 φ を作ることができる．このとき，c の曲率と φ の曲率には次の関係がある．

命題 2.4.3　$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とし，その曲率を κ とする．また，$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), v)$ とおく．このとき，φ のガウス曲率と平均曲率は以下をみたす：$K = 0$，$H = -\kappa/2$.

上記の弧長パラメータ表示に対して，Frenet の公式より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}.$$

命題の証明にこれを用いると便利である．