リー群上の左不変な幾何構造について：モジュライ空間と特別な構造の存在・非存在問題

田丸 博士
(Hiroshi TAMARU)

Osaka Metropolitan University / OCAMI

立命館大学幾何学セミナー
2024/01/15

Abstract

あらすじ

(起) リー群上の左不変幾何構造は, 特別な幾何構造の具体例を豊富に供給. (Einstein 計量, Ricci soliton, シンプレクティック, ...)

(承) 与えられたリー群に対し, 特別な左不変幾何構造の存在非存在の判定は重要.

(転) この存在非存在問題に関して「モジュライ空間」からのアプローチを提案.

(結) 様々な幾何構造に対して, 共通の枠組みを提供. いくつかの判定結果と新たな問題.

Note

- Based on several joint works.

Introduction - (1/4)

(起) リー群上の左不変幾何構造は, 特別な幾何構造の具体例を豊富に供給.

例

- 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$:
  然るべき可解リー群+左不変計量と同一視;
- 非コンパクト型リーマン対称空間 G/K:
  岩澤分解 $G = KAN$ を通して可解リー群 AN と同一視 ($\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の場合の一般化);
- Damek-Ricci 空間:
  然るべき可解リー群+左不変リーマン計量,
  Lichnerowicz 予想の反例;
- 小平-Thurston 多様体:
  Kähler でないシンプレクティック多様体.

参考 (Böhm-Lafente 2023)

- 等質リーマン多様体が Einstein (Ricci soliton), 負スカラー曲率
  $\Rightarrow$ 可解リー群+左不変計量と等長的.

Introduction - (2/4)

(承) 与えられたリー群に対し, 特別な左不変幾何構造の存在非存在の判定は重要.

Note

- 特別な左不変幾何構造を許容するリー群の分類が得られているのは低次元の場合のみ.

G: リー群, $\mathfrak{g}$: G のリー代数.

Ex 1

- $\{$左不変擬リーマン計量 on G, 符号 $(p, q)\}$
  $\cong \{$内積 on $\mathfrak{g}$, 符号 $(p, q)\}$
  $\cong \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/\mathrm{O}(p, q)$.

Ex 2

- $\{$左不変非退化 2 次形式 on $G\}$
  $\cong \{$非退化 2 次形式 on $\mathfrak{g}\}$
  $\cong \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$.

Note

- 次元が少し上がると虱潰しは不可能...

Introduction - (3/4)

(転) この存在非存在問題に関して「モジュライ空間」からのアプローチを提案.

Setting

- 以下 G は単連結;
- $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Def. (左不変計量の moduli)

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \{$ 内積 on $\mathfrak{g}$, 符号 $(p, q)\}$ (orbit space) を G 上の符号 (p, q) の左不変計量の **moduli** とよぶ.

Note

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(p + q, \mathbb{R})$;
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ で移る $\Rightarrow$ 計量が等長的. up to スカラー
- moduli $\twoheadrightarrow$ $\{$内積$\}$/(等長 up to スカラー).
- 特別な構造の探索は moduli でやれば十分.

Introduction - (4/4)

(結) 様々な幾何構造に対して, 共通の枠組みを提供. いくつかの判定結果と新たな問題.

結果の概要

- moduli を用いた特別な左不変幾何構造の存在・非存在の判定 (Milnor 枠の一般化);
- 部分多様体による特徴付け (への試み).

Ref. (Milnor 1976)

- $\mathfrak{g}$: 3-dim unimodular, $\langle , \rangle$: inner product

$\Rightarrow$ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $\exists \{x_1, x_2, x_3\}$: onb
$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3$, $[x_2, x_3] = \lambda_1 x_1$, $[x_3, x_1] = \lambda_2 x_2$.

Note

- 3-dim unimodular リー群上のの特別な左不変リーマン計量の問題は解決可能.
- Milnor の定理の証明は $\dim = 3$ に強く依存.

Riemannian Metrics - (1/3)

Recall

- moduli $:= \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \{$正定値内積 on $\mathfrak{g}\}$
  $\cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

Ex. (Hashinaga-T. 2017)

- Consider $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ with $a \neq 1$, $[e_1, e_2] = e_2, \ \ [e_1, e_3] = ae_3, \ \ [e_2, e_3] = 0$.
- Then, for left-inv. Riem. metrics,
  $$\text{moduli} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\} \cong [0, +\infty).$$
- On the corresponding G, the metric is Ricci soliton if and only if it corresponds to 0.

Cor.

- $\mathfrak{g}$ as above, $\langle , \rangle$ any inner product (正定値);

$\Rightarrow$ $\exists \lambda \geq 0$, $\exists k > 0$, $\exists \{x_1, x_2, x_3\}$ onb wrt $k\langle , \rangle$:
$[x_1, x_2] = x_2 + \lambda(a-1)x_3$, $[x_1, x_3] = ax_3$,
$[x_2, x_3] = 0$.

Riemannian Metrics - (2/3)

Ref. (Lauret 2003)

- the moduli space of $\mathfrak{g}$ is 0-dim.

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ (ablian), $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ (Lie algebra of $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$), $\mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ (3-dim Heisenberg + abelian).

Note (Kodama-Takahara-T. 2011)

- Our moduli space gives simple proof of ($\Leftarrow$).

In the previous example, moduli $\cong [0, +\infty)$,

- (metric) 0 $\leftrightarrow$ Ricci soliton;
- (orbit) 0 $\leftrightarrow$ an isolated orbit ($\Rightarrow$ minimal).

Thm. (Hashinaga-T. 2017)

If $\mathfrak{g}$ is 3-dim. solvable, then TFAE:

- $\langle , \rangle$ is Ricci soliton;
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ is an isolated orbit;
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ is a minimal orbit.

Riemannian Metrics - (3/3)

Result

以下について, 左不変リーマン計量の moduli が得られている:

- dim(moduli) $= 0$ $(\mathrm{moduli} = \{\mathrm{pt}\})$;
- $\dim(\mathfrak{g}) = 3$;
- $\dim(\mathfrak{g}) = 4$, solvable;
- almost abelian with dim(moduli) $= 1$, ...

Result

If $\mathfrak{g}$ is almost abelian with 1-dim moduli, then TFAE:

- $\langle , \rangle$ is Ricci soliton;
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ is an isolated orbit.

Ref. (Taketomi)

For any $\mathfrak{g}$,

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ is an isolated orbit.

$\Rightarrow$ $\langle , \rangle$ is Ricci soliton.

pseudo-Riemannian Metrics - (1/3)

Recall

moduli $:= \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \{$ 内積 on $\mathfrak{g}$, 符号 $(p, q)\}$
$\cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(p, q)$.

Note

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(p, q)$ is not always proper,
- so the moduli may be non-Hausdorff.

Thm. (Kubo-Onda-taketomi-T. 2016)

For $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ (Lie algebra of $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$), and for $p, q \geq 1$,

- moduli $\cong \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{R} = \{0, \pm 1\}$;
- every left-inv (p, q)-metric is const curvature.

- The Lorentz case is known by Nomizu (1979).

pseudo-Riemannian Metrics - (2/3)

Result 1 (Kondo 2022, etc)

以下について, 左不変擬リーマン計量の moduli が得られている:

- リーマン計量1個の3系列について、擬リーマンの moduli は有限集合;
- $\mathbb{R}^n$ (ablian, 各符号に1個);
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ (非リーマンの符号ごとに3個);
- $\mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ (複雑, $p, q \geq 3$ なら21個)

Result 2

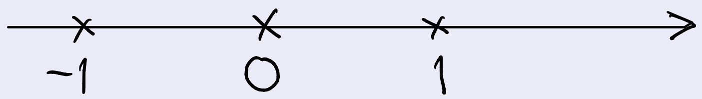
- 軌道の退化が起きる:
  $\langle , \rangle_1 \to \langle , \rangle_2 :\Leftrightarrow \overline{\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle_1} \ni \langle , \rangle_2$;
- 上の例では, 退化で計量が "改善される".

pseudo-Riemannian Metrics - (3/3)

Ex.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変擬リーマン計量について,

- (recall) moduli $= \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{R} = \{0, \pm 1\}$;
- 退化: $-1 \to 0 \leftarrow 1$;
- 計量の性質: 全て定曲率, 値は負, 0, 正 (退化により平坦になる).



$\mathbb{R}^+.(-1) = (-\infty, 0)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^+.1 = (0, +\infty)$

$\mathbb{R}^+.0 = \{0\}$

Open Problem

- いろいろなリー群の左不変擬リーマン計量の moduli の決定;
- 軌道の退化と計量の性質の関係の一般論.

Symplectic Structures - (1/2)

Recall

moduli $= \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\{$非退化 2 次形式 on $\mathfrak{g}\}$
$\cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$.

Strategy

- 左不変シンプレクティック構造の存在非存在を調べるには, 左不変非退化二次形式の中で, 閉を探す.

Thm. (CastellanosMoscoso-T. 2023)

非退化 2 次形式の moduli は

- $\mathbb{R}^{2n}$: 1 点; 閉形式;
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^{2n}}$: 1 点;, 閉 iff $n = 1$;
- $\mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{2n-3}$: 2 点 ($n = 2$) or 5 点 ($n > 2$); 閉形式は一意に存在.

Symplectic Structures - (2/2)

Result 1

以下について, 左不変シンプレクティック構造の存在非存在が判定済み:

- $\dim \mathfrak{g} = 4$;
- $\dim \mathfrak{g} = 6$, (most of) solvable;
- リーマン計量が一意的な 3 系列;
- almost abelian (in progress); ...

Result 2

- 軌道の退化で二次形式は "改善される" ($d\omega$ の Ker の次元が非増加).

Ongoing Studies

Def.

(M, g, ∇) が 統計多様体 if

- M mfd, g リーマン計量, ∇ 捩率 0 接続,
- ∇g が対称.

Def.

- $\mathcal{L}\mathrm{Stat} := \{G$ 上の左不変リーマン計量$\} \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ を 左不変統計構造の空間,
- $\mathbb{R}^+\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\mathcal{L}\mathrm{Stat}$ を **moduli 空間**.

Note

- $(g, C) \in \mathcal{L}\mathrm{Stat}$ から統計構造 (g, ∇) を得る:
  $\nabla_X Y := K(X, Y) - \nabla^g_X Y$.
  w/ $g(K(\cdot,\cdot),\cdot) = C(\cdot,\cdot,\cdot)$, ∇^g Levi-Civita.

Result (Kobayashi-Ohno-Okuda-T.)

- 左不変リーマン計量が一意的な3系列のリー群に対し, 左不変統計構造で “共役対称”, “双対平坦” なものを分類.

Summary

Summary

- 与えられたリー群上の特別な左不変幾何構造の存在非存在問題に関して，「モジュライ空間」からのアプローチを提案.
- 様々な幾何構造に対して, 共通の枠組みを提供. いくつかの判定結果, 軌道の性質で特別な構造を特徴付ける新たな問題を提示.

Reference (selected)

- H. Kodama, A. Takahara, H. Tamaru; *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math. (2011)
- T. Hashinaga, H. Tamaru; *Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds*, Internat. J. Math. (2017)
- Y. Kondo, H. Tamaru; *A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups*, Tohoku Math. J. (2023)
- L.P. Castellanos-Moscoso, H. Tamaru; *A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups*, Beitrage Algebra Geom. (2023)

Thank you very much!