リー群上の左不変な幾何構造について：（前半）等質空間入門

田丸 博士
(Hiroshi TAMARU)

Osaka Metropolitan University / OCAMI

立命館大学幾何学セミナー
2024/01/15

Abstract

- セミナー講演の前半のスライド;
- 群作用・等質空間の集合レベルでの入門.

あらすじ

- 集合が等質 :$\Leftrightarrow$ 群が推移的に作用;
- 等質な集合は G/K と書ける;
- 基本的な例: 球面, グラスマン, 旗, ...
- 幾何構造の集合も, 多くは等質.

群作用 - (1/3)

以下, G 群, M 集合.

Def.

$\Phi : G \times M \to M$, $g.p := \Phi(g, p)$ が **群作用** $:\Leftrightarrow$

- $g_1.(g_2.p) = (g_1g_2).p \quad (\forall g_1, g_2 \in G, \forall p \in M)$;
- $e.p = p \quad (\forall p \in M)$.

群作用を $G \curvearrowright M$ で表す.

Ex.

${}^t g.g = I$, i.e. $\langle g(\cdot), g(\cdot) \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ by $g.v \mapsto gv$;
- $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ (上の制限);
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$ naturally;
- $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ by "一次分数変換".

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$G_k(\mathbb{R}^n) := \{V : k\text{-dim subspace in } \mathbb{R}^n\}$: グラスマン.

群作用 - (2/3)

Def.

$G \curvearrowright M$, $p \in M$ に対し

- $G.p := \{g.p \mid g \in G\}$ を 軌道 (**orbit**).

Ex.

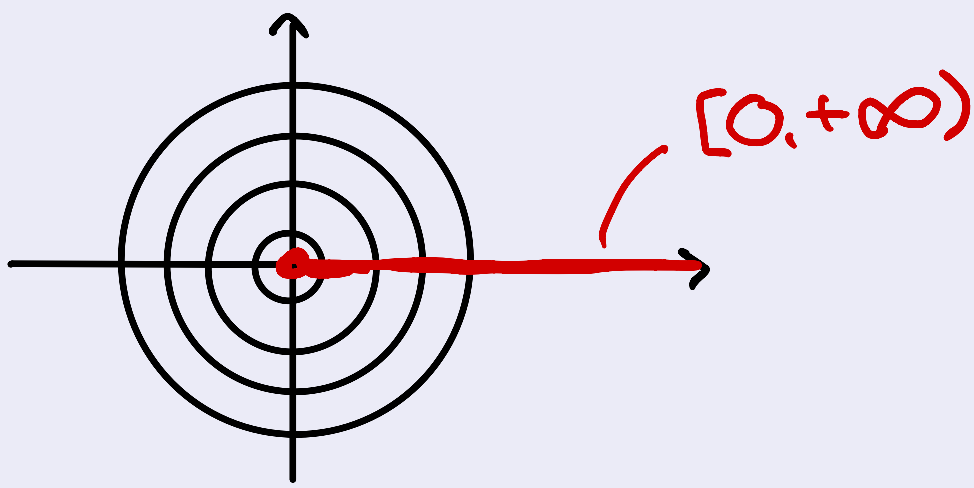
$\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ に対し,

- $\mathrm{O}(n).0 = \{0\}$;
- $\mathrm{O}(n).e_1 = S^{n-1}$ (単位球).

Note

$G \curvearrowright M$ に対し,

- $G \backslash M := \{G.p \mid p \in M\}$ を 軌道空間;
- 例: $\mathrm{O}(n) \backslash \mathbb{R}^n \cong [0, +\infty)$.

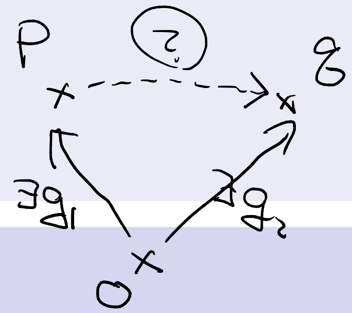


群作用 - (3/3)

Def.

群作用 $G \curvearrowright M$ が **推移的** :$\Leftrightarrow$

- $\forall p, q \in M, \exists g \in G : g.p = q$



Prop.

$o\ (\in M)$ 固定. 群作用 $G \curvearrowright M$ が推移的 $\Leftrightarrow$

- $\forall p \in M, \exists g \in G : g.o = p$.

Ex.

- $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ は非推移的;
- 前頁の他の例は全て推移的.

Proof

$O(n) \curvearrowright S^{n-1}$ 推移的 を示す.

[示すこと : $\forall x \in S^{n-1}, \exists g \in O(n) : g.e_1 = x$]

$\forall x \in S^{n-1}$ をとる.

$\exists x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n : \{x, x_2, \cdots, x_n\}$: onb

$g := (x, x_2, \cdots, x_n)$ とおくと,

$g \in O(n)$

$g.e_1 = (x, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x$ $\blacksquare$

等質空間表示 - (1/2)

等質な集合 $\Rightarrow G/K$ と書ける.

Def.

G 群, K 部分群とする.

- $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$;
- $G/K := G/\sim$ を G の K による 剰余集合.

Note

- $\sim$ は同値関係;
- 同値類は $[g] := \{h \in G \mid h \sim g\} = gK$;
- K は正規部分群とは限らない.

Prop.

G は G/K に次で推移的に作用:

- $g.[h] := [gh]$.

等質空間表示 - (2/2)

Def.

$G \curvearrowright M$, $p \in M$ に対し,

- $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ を **固定部分群**.

Prop.

$G \curvearrowright M$ 推移的, $p \in M$ のとき次が成立:

- $G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$ は全単射.

示すことは「well-defined」「全射」「単射」.
そのうち推移的を使うのは？

基本的な例 - (1/2)

等質空間表示の求め方

- 推移的な作用 $G \curvearrowright M$ を選ぶ;
- 点 $p \in M$ を選ぶ;
- 固定部分群 G_p を決定.

Ex.

球面 S^n $(\subset \mathbb{R}^{n+1})$ に対して

- $e_1 \in S^n$ を選ぶ;
- $S^n = O(n+1)/O(n)$;
- ただし $O(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in O(n) \right\}$.
- $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ とも表せる.

[示すこと: $O(n+1)_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in O(n) \right\}$]

(⊃) clear

(⊂) $\forall g \in O(n+1)_{e_1}$ をとる.

$g e_1 = e_1$ より $g = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right)$

$g \in O(n+1)$ より $* = 0$, $\alpha \in O(n)$ $\square$

基本的な例 - (2/2)

Ex.

グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ に対して

- $V_0 := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ を選ぶ;
- $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \text{size} \\ (k, n-k) \end{array} \right\};$
- $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) / (\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$ も可能.

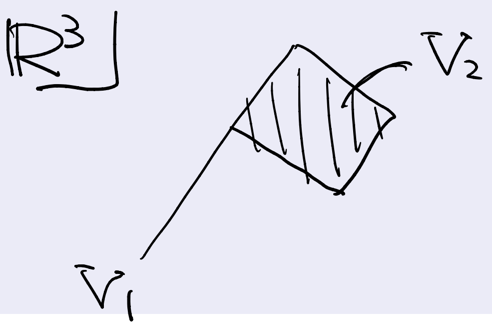
Ex.

$1 \leq j_1 < \cdots < j_k < n$ に対し, $\subset \mathbb{R}^n$

- subsp 列 $V_1 \subset \cdots \subset V_k$ $(\dim V_i = j_i)$ を **旗**;
- 旗全体の集合 $F_{(j_1, \ldots, j_k)}(\mathbb{R}^n)$ を **旗多様体**.

例えば $(1, 2)$ を考えると,

- $F_{(1,2)}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{O}(3) / (\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)).$



幾何構造の集合 - (1/2)

Ex.

- $\mathcal{M}_n := \{\langle , \rangle : 正定値内積 \text{ on } \mathbb{R}^n\}$;
- 次の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathcal{M}_n$ は推移的:

$$g.\langle , \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot)\rangle;$$

- $\mathcal{M}_n = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

- Rem.: 作用の定義式は g^{-1} でないと困る ((左) 作用にならない).

Ex.

- $\mathcal{M}_{p,q} := \{\langle , \rangle : 符号 (p, q) 内積 \text{ on } \mathbb{R}^{p+q}\}$;
- 同様の $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathcal{M}_{p,q}$ は推移的;
- $\mathcal{M}_{p,q} = \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/\mathrm{O}(p, q)$.

- Rem.: $\mathrm{O}(p, q)$ は不定値直交群.

幾何構造の集合 - (2/2)

Ex.

$\mathbb{R}$

- $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}) := \{\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$: 非退化交代$\}$;
- 次の $\mathsf{GL}(2n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ は推移的:

$$g.\omega := \omega(g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot));$$

- $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathsf{GL}(2n, \mathbb{R})/\mathsf{Sp}(n, \mathbb{R})$.

- リー群上の左不変な幾何構造の研究では，これらの空間が本質的な役割を担う．
- 後半に続く...