不変量の簡単な紹介【学生向け講演】

田丸 博士

大阪公立大学 / OCAMI

千歳幾何学研究集会 2024/08/~~06~~ 05

概要

あらすじ

- 不変量の考え方は, 数学の多くの分野に登場する(中学高校でも背後にあった).
- その考え方を意識することは, 見通しの良さに繋がる.
- できるだけ簡単な具体例を用いて, 不変量の考え方・使い方を紹介する.

目次

不変量とは何か - (1/5)

- 不変量: 同値関係に対し, 同値で不変な量.

Def (同値関係)

"集合" X 上の関係 $\sim$ が **同値関係** $:\Leftrightarrow$

- $\forall x \in X,\ x \sim x;$
- $\forall x, y \in X\ (x \sim y),\ y \sim x;$
- $\forall x, y, z \in X\ (x \sim y,\ y \sim z),\ x \sim z.$

Note

- 集合 X と同値関係 $\sim$ に対して「$x, y \in X$ が同値かどうかの判定」は基本問題.

Ex. 1 (三角形)

- 三角形の合同および相似は, 同値関係.

Ex. 2 (行列)

- $M_n(\mathbb{R}) := \{X :$ 実 $n \times n$ 行列$\}$,
- $A \sim B$
  $:\Leftrightarrow \exists T \in M_n(\mathbb{R})$ (T 可逆): $B = T^{-1}AT$.

不変量とは何か - (2/5)

Ex. 3 (各種の同型)

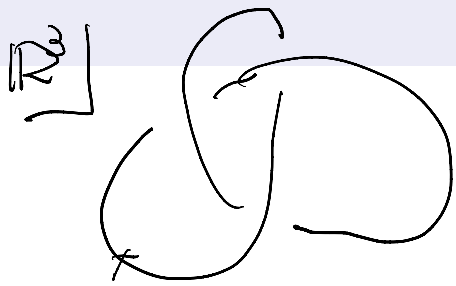
- ベクトル空間の線型同型;
- 群・環・体の同型;
- 位相空間の同相, 多様体の可微分同型, ...

Ex. 4 (曲線)

- $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ 平面曲線 (正則),
- 同型: パラメータ変換と回転と平行移動で移る.

Ex. 5 (結び目)

- $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$: 単射連続 (結び目),
- 同型: 伸び縮み可能なひもとみなして同じ形に変形できる.



不変量とは何か - (3/5)

例題 1

- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は線型同型でないことを示せ.

claim $\nexists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: linear isom.

Proof dim が違う. //

例題 2

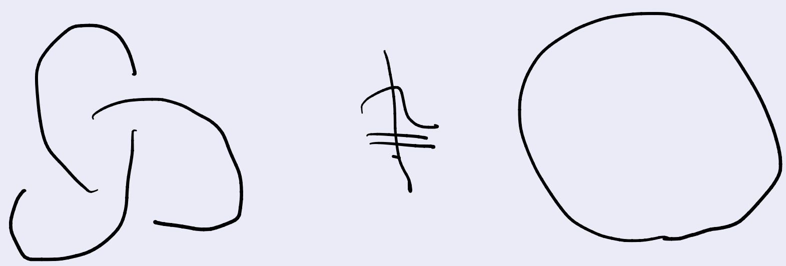
- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相でないことを示せ.
- $\mathbb{R}$ と S^1 は同相でないことを示せ.

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} - \{0\}}_{\text{非連結}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^2 - \{p\}}_{\text{連結}}$ ✗

例題 3

- 以下の結び目が同型でないことを示せ:



不変量とは何か - (4/5)

Def. (不変量)

X, Y を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする.
写像 $\pi : X \to Y$ が X の $\sim$ に関する 不変量 :$\Leftrightarrow$

- $\forall x, x' \in X\ (x \sim x'),\ \pi(x) = \pi(x')$.

Note

- π が不変量ということと次は同値:
  誘導写像 $\pi : (X/\sim) \to Y$ が well-defined.

Ex. 1

- 面積 : $\{$三角形$\} \to \mathbb{R}$ は合同に関する不変量, 相似に関する不変量でない;
- 三辺の長さ : $\{$三角形$\} \to \mathbb{R}^3$ (を短い順に並べたもの) は合同に関する不変量;
- 三辺の長さの比は相似に関する不変量.

不変量とは何か - (5/5)

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

$\mathrm{tr}(\cdot) = a+d$

$A \sim B$

$:\Leftrightarrow B = {}^tT A T$

Ex. 2

- 行列の det, tr, 固有値, ... は共役に関する不変量;
- 例えば "第一列の和" は不変量でない.

Ex. 3

- ベクトル空間の次元は, 線型同型に関する不変量;
- 群の位数, 単純かどうか, ... は同型に関する不変量.

Ex 4

- なめらかな平面曲線の曲率は合同に関する不変量
- $c : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対して, 曲率 $= \dfrac{\det(c', c'')}{|c'|^3}$ (直感的には "曲がり具合" を表す)

不変量の使い方 1 - (1/3)

Note

- 不変量を使って同値かどうか判定する;
- 同値でないこと (非存在) の証明は難しい;
- “不変量が違う $\Rightarrow$ 同値でない”.

Note (たとえ話)

- 犯罪捜査でも不変量に着目. 大雑把な量 (e.g., 血液型), 詳細な量 (e.g., 指紋, DNA)...

Ex. 1

- $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ (線型同型でない)

Ex. 2

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化できない.

<u>claim</u> $\nexists T$ (可逆) s.t. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} T$

$$\exists T \Longrightarrow \begin{array}{l} \det\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \Longrightarrow a = b = 0 \text{ 矛}$$

不変量の使い方 1 - (2/3)

Ex. 3

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$ (群同型でない).

//
{(0,0), (0,1),
(1,0), (1,1)}

4
0, 1, 2, 3

1+1 = 2 ≠ 0

Ex. 4

- $\mathbb{R} \not\cong S^1$ (同相でない);
- $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ (同相でない).

さっき やった.

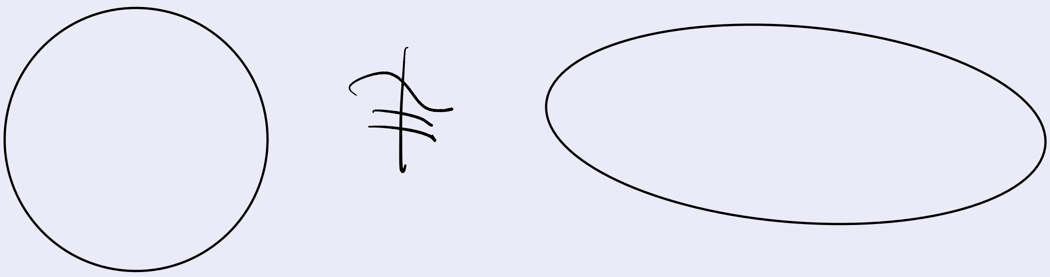
Note

- 不変量は数値とは限らない.

不変量の使い方 1 - (3/3)

Ex. 5

- 円と (円でない) 楕円は合同でない.



不変量の使い方 2 - (1/3)

次のようなことがある:

- 不変量から性質が分かる;
- 不変量と別の不変量が関係する.

Note (違うけど似てるもの)

- 占い…例えば, 血液型や星座から, その人の性格が分かる (という主張)

Ex. 1

- $L : \{三角形\} \to \mathbb{R}^3$ (三辺の長さ)
  $\Rightarrow L(\Delta)$ から Δ の面積が分かる (ヘロンの公式)

Note

- $A : \{三角形\} \to \mathbb{R}$ (面積)
- 上の例の言い換え: $A(\Delta)$ は $L(\Delta)$ で書ける.

不変量の使い方 2 - (2/3)

Ex. 2

- 対象: 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$;
- 不変量: 判別式 $D = b^2 - 4ac$;
- 性質: D から実数解 / 重解の有無が分かる.

Ex. 3

- 不変量: $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$;
- 性質: $\det(T) \neq 0 \Rightarrow T$ が可逆.
  (det から別の不変量
  $M_n(\mathbb{R}) \to \{$可逆, 可逆でない$\}$ が分かる)

Ex. 4 (群の位数)

- 対象: 有限群;
- 不変量: 位数 $\#G$;
- 性質: 位数が素数 $\Rightarrow$ 巡回群.

不変量の使い方 2 - (3/3)

Note

- 対象 X の不変量 π_1, π_2 に対し, "$\pi_1(x)$ は $\pi_2(x)$ から分かる" 型の定理がよくある;
- 先の例はこの範疇に入る.
- π_1 と π_2 が全然違うと, 非常に凄い.

Ex. 5 (Gauss-Bonnet の定理)

- M 閉曲面のとき $\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$;
- K はガウス曲率; 左辺は微分幾何的;
- $\chi(M)$ はオイラー数; 右辺は位相的.

まとめ (1/2)

- 不変量の考え方・使い方を紹介した.
- これらは「見通しの良さ」に繋がる.

例 (どこに着目するかは対象に依存)

- 曲線: 曲がり具合に着目→曲率;
- 位相空間: 穴の数に着目→基本群.

例 (不変量の構成に別の不変量)

- 曲面: 曲がり具合を行列で表す→行列の不変量 (det = ガウス曲率, tr = 平均曲率)
- 多様体: 情報を群で表す

まとめ (2/2)

- 講義・講演を聞く時に, 不変量のことを意識することで, 大枠が把握できることがある.

例 (不変量が特別な場合の研究)

- （3次元）ポアンカレ予想: 単連結な3次元閉多様体は S^3 に同相

例 (非存在の証明)

- 対象 X と不変量 $f: X \to \mathbb{R}$ に対して,「X 上に (A) が存在 $\Rightarrow f(X) = 0$」のとき, $f(X) \neq 0$ なら (A) は存在しない.
- 例: 二木不変量, ...

- タイトルに「不変量」と付く入門書がいくつかあるので, 興味のある方はご参照を.
- Thank you.