トーラスの正則管状近傍について

On holomorphic tubular neighborhoods of a complex torus

大阪公立大学 理学研究科
数学専攻 後期博士課程3年 小川 智史

JST 次世代研究者挑戦的プログラム SPRING
異分野研究交流会 2024年11月16日

概要

複素力学系における無理中立不動点に対する線形化定理は、いわば正則関数の「標準形理論」である。多様体近傍の座標変換関数に線形化を施すことで、複素解析的で均質な円柱型近傍である正則管状近傍を得ることができる。本研究では、最も単純な設定である、非特異2次元複素多様体（複素曲面）内の複素1次元トーラスに対し、正則管状近傍の存在のための十分条件を改良した。

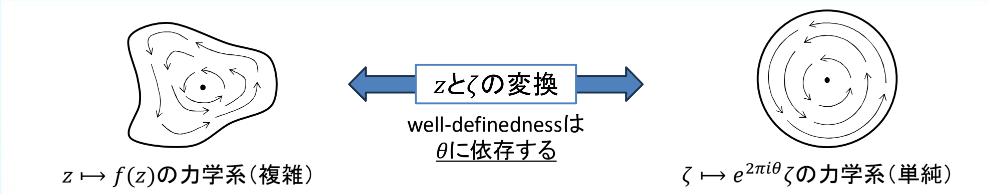
背景：複素1次元力学系における線形化定理

複素力学系とは正則関数の複数回合成による挙動（力学系）を調べる研究分野である。
一般に合成は計算が難解となるため以下のような結果が重要となる。

Theorem (Siegel[6], Brjuno[2])
原点周りで定義された原点を不動点に持つ正則関数

$$z \mapsto f(z) = e^{2\pi i\theta} z + \mathrm{h.o.t}, \theta: \text{irrational number}$$

はθがある有理数近似に関する条件を満たすとき線形化可能。つまり、原点の十分近くで座標zを異なる座標ζに置き換えて、fは$\zeta \mapsto e^{2\pi i\theta}\zeta$と共役となる。



有理数近似に関する条件

Siegel：Diophantus条件

$$\exists c, \tau > 0 \text{ s.t. } |p\theta - q| > cq^{-\tau}, \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

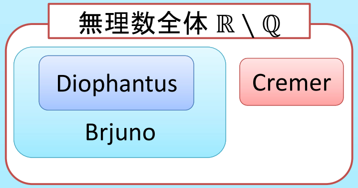
（有理数の近似による誤差が分母のべきより大きい。
例：代数的数（$\sqrt{2}$など）

Brjuno：Brjuno条件

$$\omega_k = \max_{1 \le l \le 2^k - 1} 1/\mathrm{dist}(l\theta, \mathbb{Z}) \text{ に対し、}$$

$$\sum_{k \ge 1} 2^{-k} \log \omega_{k+1} < \infty \text{となる。}$$

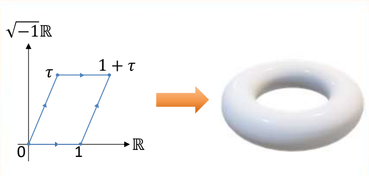
Cremer: 線形化不可能となる無理数θが存在する。



図：それぞれの条件の関係
Brjuno条件はDiophantus条件の改良となっている。

複素幾何学への応用（トーラスについて）

複素n次元Euclid空間$\mathbb{C}^n$と局所的に同相である空間を**n次元複素多様体**という。
今回は2次元複素多様体に埋め込まれた（1次元複素）トーラス近傍の座標変換について考える。トーラスは平行四辺形の対辺を適切に貼り合せることで得られる、コンパクトな1次元複素多様体の一種。



平行四辺形と複素1次元トーラス

正則管状近傍と先行研究

Cを複素1次元トーラスとし、非特異複素曲面Mに正則に埋め込まれているとする。このとき、法線束$N = N_{C/M}$の零切断近傍と双正則な近傍を**正則管状近傍**という。

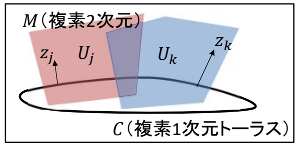
正則管状近傍を得る手法：完全線形化

各$U_j \cap U_k$での座標変換が

$z_k = t_{kj} z_j,\ t_{kj} \in \mathrm{U}(1)$

$w_k = H_{kj}(w_j)$

となる局所座標$\left\{\left(U_j, (z_j, w_j)\right)\right\}_j$を構成できるか？



多様体近傍の座標変換関数に"線形化を適用"する。
無理数θの代わりにNの数論的な情報を見る。

Theorem (Arnol'd[1])
ユニタリ平坦な法線束Nが以下のDiophantus条件を満たすとき正則管状近傍が存在する：

$$\exists c, \mu > 0 \text{ s.t. } d\left(E, N^{\otimes n}\right) > cn^{-\mu}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

E:C上の正則に自明な直線束
d：Picard多様体の内Eを含む連結成分$\mathrm{Pic}^0(C)$上にEuclid距離から誘導される距離関数

主結果と応用

複素1次元力学系と同様にArnol'dの結果は仮定を弱めることができるか？ → Yes

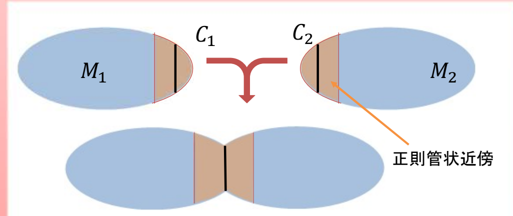
Main Result[5]
ユニタリ平坦な法線束Nが以下のBrjuno条件を満たすとき正則管状近傍が存在する：

$$\Omega_k = \max_{1 \le l \le 2^k - 1} 1/\mathrm{d}(E, N^{\otimes l}) \text{ に対し、} \sum_{k \ge 1} 2^{-k} \log \Omega_{k+1} < \infty \text{となる。}$$

正則管状近傍内では変換が線形なので貼り合せが容易
→正則管状近傍同士を貼り合せて別の多様体を構成

Application[3][4]
測度論的にほとんどすべてのK3曲面（複素曲面の一種）が貼り合せ構成から実現される。

数論的考察から、Lebesgue測度の意味でほとんどすべての状況で正則管状近傍が存在することから示される。



貼り合せ構成のイメージ図

参考文献
[1]V. I. Arnol'd, Bifurcation of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funktional'nyi Analiz I ego Prilozheniya, **10**(4), 1—12. 1976.
[2]A. D. Brjuno, The analytical form of differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., **25**, 131—288, 1971.
[3]T. Koike and U. Takato, A gluing construction of K3 surfaces, to appear in Michgan Math. J.
[4]F. Lequen, Presque toute surface K3 contient une infinté d'hypersurface Levi-plats linéare, Journal de l'École Polytechnique-Mathématiques, **10**, 815—836, 2023.
[5]S. Ogawa, On holomorphic tubular neighborhoods of compact Riemann surfaces, to appear in The Journal of Geometric Analysis.
[6]C. L. Siegel, Iteration of analytic functions, Ann. Math., **43**, 607—412, 1942.