

クラスター代数の理論とアフィンリー環の表現論との関連性

理学研究科数学専攻：武中 亮

研究の動機

クラスター代数の理論から出てくる多項式とアフィンリー環の表現論に関連する多項式を結びつける水野予想[M]を通じて二つの理論の関連性を追求する

クラスター代数

- ・クイバー：有向グラフ
- ・クラスター：不定元の組
- ・クラスター変換：クイバーとクラスターの周期性をもつ変換

クラスター代数はこれらの組から生成される代数系で組合せ論や代数幾何、数論など幅広い分野で登場する

アフィンリー環

- ・弦理論や共形場理論、モジュラー関数論など幅広い分野で登場する無限次元ベクトル空間
- ・ディンキン図形と呼ばれるグラフにより分類される

表現

アフィンリー環の加群 (≠加法群)

水野予想

論文[M]において次の予想が提唱された

* 記号の定義は省略

クラスター代数理論

$$\det(zI - J_Y(\eta))$$

=

$$\frac{N_{X_{n,\ell}}(z)}{D_{X_{n,\ell}}(z)}$$

アフィンリー環の表現論

主定理

論文[M]と[T]により $\ell = 2$ の場合は予想が正しいことが**ほぼ**証明された

* X_n がリー環の分類に相当するが、 $X_n = C_n$ のときは同値な予想への定式化にとどまる

今後の課題

- ・ $(X_n, \ell) = (C_n, 2)$ の場合の予想の解決
- ・ 一般の ℓ についての予想・定式化および証明
- ・ クラスター代数理論とアフィンリー環の表現論の繋がり の 解明

参考文献

[M] Y. Mizuno, Exponents Associated with Y-systems and their Relationship with q-Series, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 16 (2020): 238.

[T] R. Takenaka, Note on exponents associated with Y-systems, arXiv preprint arXiv:2410.02286 (2024).